

CNAM

Theoretische Informatik I

So eine Art Pseudoskript

Frithjof Dau

Version vom 10. Februar 2005, und zwar spät nachts.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Funktionen	1
1.1 Mengensprache	1
1.2 Gleichheitsnotationen	4
1.3 Relationen zwischen und Operationen auf Mengen	5
1.4 Relationen und Funktionen	8
2 Relationen und Verbände	17
2.1 Eigenschaften von Relationen	17
2.2 Äquivalenzrelationen und Partitionen	23
2.3 Ordnung ist das halbe Leben	27
2.4 Verbände	33
3 Formale Begriffsanalyse und Begriffsverbände	37
4 Logik	39
4.1 Aussagenlogik	39
4.2 Prädikatenlogik	46

Kapitel 1

Mengen und Funktionen

1.1 Mengensprache

Mengen bilden das Grundgerüst moderner Mathematik. Nahezu die gesamte Mathematik wird heutzutage mittels Mengen durchgeführt. Aus diesem Grund soll in diesem ersten Kapitel eine kurze Einführung in die Sprache der Mengenlehre gegeben werden.

Der Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, hat 1895 Mengen wie folgt beschrieben:

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die *Elemente* der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Für unsere Zwecke reicht dieses Verständnis einer Menge problemlos aus. Es sollte allerdings nicht unerwähnt bleiben, daß die ‘Definition’ von Cantor zu massiven Problemen geführt hat, da sie in sich widersprüchlich ist. Die Definition erlaubt nämlich durchaus Mengen, die sich selbst als Element enthalten, auch wenn derartige Mengen schwer vorstellbar sind und im normalen Alltagsgebrauch von Mathematikern nicht vorkommen. Nun kann man mit Cantors Definition insbesondere folgende Menge bilden: Sei \mathcal{M} die *Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten*. Ist \mathcal{M} ein Element von sich selbst? Falls ja, dann muß \mathcal{M} ja die Eigenschaft erfüllen, die die Elemente von \mathcal{M} auszeichnet, aber damit ist \mathcal{M} gerade *kein* Element von sich selbst. Wenn aber \mathcal{M} kein Element von sich selbst ist, muß es nach Definition von \mathcal{M} ein Element von \mathcal{M} sein, also sich *doch* selbst enthalten. Wie man sieht, gerät man bei \mathcal{M} in eine unauflösbare Paradoxie. Aus diesem Grund ist Cantors Definition streng genommen für Mathematiker nicht tragbar.

Aber, wie gesagt, im normalen Mathematikerleben treten derartige, exotische Mengen wie \mathcal{M} nicht auf. Ganz im Gegenteil: In der axiomatischen Mengenlehre gibt es das sogenannte Fundierungsaxiom, daß gerade solche Mengen quasi verbietet. Insoweit spiegelt Cantors Definition immer noch recht gut das ‘naive’ Mathematikerverständnis von Mengen wider und reicht im Rahmen dieses Skriptes als Definition für Mengen durchaus aus. Für unsere Zwecke reicht dieses Verständnis einer Menge problemlos aus.

Betrachten wir Cantors Definition genauer. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, die dann Elemente der Menge genannt werden. Eine Menge besteht also aus ihren Elementen. Sie wird genau dadurch beschrieben, daß man zu jedem Objekt sagen kann, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Wenn ein Objekt o zu einer Menge M gehört, so schreibt man das

$$o \in M$$

und sagt 'o ist ein Element von M ' oder ' M enthält o '. Es kommt dabei nur auf das reine 'Enthaltein' an, nicht darauf wo, wie oft, oder gar 'wann', 'warum', 'wie', ... ein Element in einer Menge enthalten ist. Das kann man bereits an der Schreibweise $o \in M$ erkennen, da diese Schreibweise gar nicht erlaubt, die 'Position' oder die 'Häufigkeit' von o in M zu beschreiben. Da eine Menge eindeutig durch ihre Elemente beschrieben ist, sind zwei Mengen genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.¹

Eine Menge kann auf verschiedene Arten angegeben werden. Beginnen wir mit der einfachsten und bekanntesten: Man zählt einfach alle Elemente der Menge auf, getrennt durch Kommata, und schließt diese Aufzählung in diese komplizierten, schwer zu zeichnenden geschweiften Klammern, die MENGENKLAMMERN, ein. Also:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ist die² Menge, die die Zahlen von 1 bis 6 enthält.

Wenn wir die Elemente aufzählen, kommt es nicht auf die Reihenfolge an, sondern nur darauf, daß jedes Element der Menge irgendwo mindestens einmal genannt wird (und natürlich keine anderen Elemente, die nicht zur Menge gehören). Wenn ein Element mehrfach genannt wird: Macht nichts, ist aber auch nicht nötig, sondern nur ein unnötige Wiederholung der Information, daß das Element zur Menge gehört. Also beschreiben alle folgenden 'Mengenterme' ein und dieselbe Menge, nämlich immernoch die Menge mit den Zahlen von 1 bis 6:

$$\{6, 5, 4, 3, 2, 1\}, \quad \{6, 2, 6, 4, 3, 1\}, \quad \{1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6\}, \quad \{6, 1, 4, 2, 3, 1, 5, 3, 4, 2, 6, 5, 5, 4\}$$

Man darf auch Pünktchen verwenden, wenn es nicht zu Mißverständnissen kommen kann. Die Menge mit den Zahlen von 1 bis 1000 möchte man beispielsweise nicht komplett hinschreiben. Stattdessen schreibt man beispielsweise

$$\{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

Mengen dürfen auch unendlich viele Elemente enthalten. Bekannte Beispiele sind Zahlenmengen, wie

1. \mathbb{N} : Die Menge der natürlichen Zahlen, also $\{1, 2, 3, \dots\}$
2. \mathbb{N}_0 : Die Menge der natürlichen Zahlen incl. 0, also $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
3. \mathbb{Z} : Die Menge der ganzen Zahlen,
4. \mathbb{Q} : Die Menge der rationalen Zahlen (Brüche)
5. \mathbb{R} : Die Menge der reellen Zahlen

Wie man sieht, drängt sich bei einigen unendlichen Mengen die Pünktchenschreibweise geradezu auf, aber nicht bei allen. Natürlich ist bei der Pünktchenschreibweise darauf zu achten, daß die Menge eindeutig beschrieben wird. Eine Schreibweise der Form

$$\{2, 3, 5, \dots\}$$

¹Dieses Prinzip wird in der axiomatischen Mengenlehre *Extensionalitätsaxiom* genannt.

²Hier geht es schon los mit mathematischer Genauigkeit: Es heißt *die* und nicht *eine* Menge, da die Menge durch Angabe der Elemente eindeutig beschrieben ist. Korinthenkackerei? Nein, sondern ein sehr präzises Mathematikerverständnis vom Gebrauch unbestimmter und bestimmter Artikel.

ist beispielsweise nicht gerade glücklich, wenn man die Menge der Primzahlen beschreiben will. Man sollte schon so viele Elemente hinschreiben, daß das Verständnis der Pünktchen nicht einem IQ-Test gleicht. Für die Primzahlen wäre also beispielsweise die folgende Schreibweise besser:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

Eine ganz besondere Menge ist die Menge, die *gar keine* Elemente enthält. Davon gibt es genau eine (warum?), und deswegen bekommt sie auch einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol. Man nennt sie die LEERE MENGE und benutzt folgende Symbole:

$$\text{Die LEERE MENGE: } \quad \{\} \quad \text{oder} \quad \emptyset$$

Die linke Schreibweise ist ja bereits eingeführte Aufzählungsschreibweise. Gebräuchlicher ist allerdings die rechte. Man sollte aber vorsichtig sein: Die Menge $\{\emptyset\}$ ist *nicht*, wie immer wieder vermutet wird, eine besonders sichere Schreibweise für die leere Menge. Denn: zwischen den geschweiften Klammern steht ja ein Element, nämlich die leere Menge. Also ist $\{\emptyset\}$ nicht leer, sondern enthält ein Element, halt gerade die leere Menge.

Wir haben bereits festgestellt, daß Mengen sich nicht selbst als Element enthalten können, aber daß eine Menge ein Element einer anderen Menge ist, ist ungefährlich. Es ist in der Mathematik sogar extrem normal. Um genau zu sein: In der axiomatischen Mengenlehre gibt es nur Mengen als Elemente von Mengen (es gibt keine Unterscheidung zwischen Objekten, die ‘Mengen’, und Objekten, die ‘Elemente’ sind). Doch dazu später mehr.

Häufig sind Mengen durch Bedingungen gegeben, wo aus bereits gegebenen Mengen bestimmte Teilmengen (die Definition einer ‘Teilmenge’ folgt noch, aber intuitiv sollte der Begriff klar sein) ausgesondert werden. Zum Beispiel kann man die Menge der Quadratzahlen Q wie folgt beschreiben: Quadratzahlen sind die natürlichen Zahlen, die sich als Quadrat einer weiteren natürlichen Zahl darstellen lassen. Ausgesondert wird hier aus der gegebenen Menge der natürlichen Zahlen, die Bedingung ist, daß sich eine Zahl als Quadrat einer natürlichen Zahl darstellen läßt.

$$Q := \{x \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } y \in \mathbb{N} \text{ mit } y \cdot y = x\}$$

(Das Zeichen ‘:=’ bedeutet, daß Q als die Menge $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } y \in \mathbb{N} \text{ mit } y \cdot y = x\}$ definiert wird. Das wird im nächsten Teilkapitel genauer erläutert.) Die Lesart dieser Menge soll nun genauer erklärt werden. Der Teil ‘ $x \in \mathbb{N}$ ’ links vom Strich erklärt, daß wir mit der Ausgangsmenge der natürlichen Zahlen starten, also mit

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

Das x durchläuft sozusagen alle natürlichen Zahlen, und wir müssen jedesmal prüfen, ob die Bedingung ‘es gibt ein $y \in \mathbb{N}$ mit $y \cdot y = x$ ’ auf das jeweilige x zutrifft. Also:

- $x = 1$: Klappt für $y = 1$, da $1 \cdot 1 = 1$. Also gehört 1 zur Menge Q .
- $x = 2$: Klappt für kein $y \in \mathbb{N}$, da $1 \cdot 1 \neq 2$, $2 \cdot 2 \neq 2$, $3 \cdot 3 \neq 2$, \dots . Also gehört 2 nicht zu Q .
- $x = 3$: Klappt für kein $y \in \mathbb{N}$, da $1 \cdot 1 \neq 3$, $2 \cdot 2 \neq 3$, $3 \cdot 3 \neq 3$, \dots . Also gehört 3 nicht zu Q .
- $x = 4$: Klappt für $y = 2$, da $2 \cdot 2 = 4$. Also gehört 4 zu Q .
- $x = 5$: Klappt für kein $y \in \mathbb{N}$, da $1 \cdot 1 \neq 5$, $2 \cdot 2 \neq 5$, $3 \cdot 3 \neq 5$, \dots . Also gehört 5 nicht zu Q .
- etc.

Es werden also sozusagen die Zahlen $1, 4, 9, \dots$ aus der Menge ausgesondert (im positiven Sinne, d.h., sie ‘dürfen bleiben’), die anderen Zahlen werden ‘entfernt’. Man könnte sich die Aussonderung ungefähr so vorstellen:

$$Q = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, \cancel{11}, \dots\} = \{1, 4, 9, \dots\}$$

Bei der Notation ‘ $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } y \in \mathbb{N} \text{ mit } y \cdot y = x\}$ ’ ist der Strich in der Mitte wichtig: Links davon steht die Menge, aus der ausgesondert wird. Rechts steht die Bedingung, mittels der ausgesondert wird. Das ist eine Bedingung, die auf die Elemente der ‘Startmenge’ (hier: \mathbb{N}) angewendet wird, deswegen brauchen wir eine Variable, die die Elemente beschreibt: Das ist in unserem Beispiel natürlich x . Eine derartige Variable wird immer auftauchen, wenn diese Art der Schreibweise für Mengen benutzt wird. Auf den Namen der Variablen kommt es aber nicht an, wir hätten genausogut

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \cdot m = n\} && \text{oder} \\ &\{\text{bums} \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt ein } \text{dings} \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{dings} \cdot \text{dings} = \text{bums}\} \end{aligned}$$

schreiben können. Auch die zweite Schreibweise ist vollkommen legal, wenn ihr auch eine gewisse Seriösität fehlt. Es gibt auch Autoren, die verwenden einen Doppelpunkt ‘:’ statt des Balkens ‘|’, sie würden also stattdessen $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ wird von } 2 \text{ geteilt}\}$ schreiben. Man kann auch die Menge, aus der ausgesondert wird, auf die rechte Seite schreiben. Also ist auch

$$\{x : x \in \mathbb{N} \text{ und es gibt ein } y \in \mathbb{N} \text{ mit } y \cdot y = x\}$$

legitim. Das klappt genauso gut, wichtig ist nur, daß man ein Trennzeichen hat. Die Schreibweise

$$\{x \in \mathbb{N} \text{ und es gibt ein } y \in \mathbb{N} \text{ mit } y \cdot y = x\}$$

hat aber kein derartiges Trennzeichen, ist also *falsch*.

1.2 Gleichheitsnotationen

Bevor wir zu Operationen mit Mengen und Relationen zwischen Mengen kommen, sollen erst verschiedene Notationen für Gleichheit vorgestellt werden.

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Das schreibt man wie üblich mit einem Gleichheitszeichen, also

$$A = B$$

Wir haben auch schon Methoden kennengelernt, Mengen zu beschreiben. Wenn man nun eine Menge definieren will, sollte man den Definitionscharakter durch ein besonderes Gleichheitszeichen, ein ‘Definitionsgleichheitszeichen’, benutzen. Ein Definitionsgleichheitszeichen besteht aus einem normalen Gleichheitszeichen mit einem vorangestellten Doppelpunkt. Die nächste Zeile sagen entsprechend aus, daß die Menge A als die Menge aller geraden Zahlen > 2 und die Menge P als die Menge Primzahlen definiert wird.

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 2 \text{ und } n \text{ wird von } 2 \text{ geteilt}\}$$

$$P := \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1 \text{ und } n \text{ wird nur von } 1 \text{ und } n \text{ selbst geteilt}\}$$

Die Unterscheidung zwischen einem vergleichendem Gleichheitszeichen und einem definierenden Gleichheitszeichen ist auch in einigen Programmiersprachen bekannt. Beispielsweise wird in C und $C++$ für einen logischen Vergleich das Zeichen ‘==’ benutzt, eine Zuweisung passiert durch das Zeichen ‘=’. Eine Codezeile in $C++$ könnte also wie folgt aussehen:

if (x==5) { j=a*b }

Der Teil (x==5) *vergleicht* x mit 5, der Teil j=a*b *weist* j den Wert a*b zu.

Wenn wir später Beweise durchführen werden, muß manchmal die Gleichheit von Mengen erst gezeigt werden. Wir können beispielsweise neben A die Menge B aller geraden Zahlen, die sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lassen, wie folgt definieren:

$$B := \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 2 \text{ und } n \text{ wird von } 2 \text{ geteilt und es gibt } p, q \in P \text{ mit } n = p + q\}$$

Eine berühmte Vermutung, die sogenannte Goldbach-Vermutung, besagt, daß sich *jede* gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen darstellen läßt, also daß die Mengen A und B identisch sind. Wenn wir nun angeben wollen, daß wir diese Vermutung noch zeigen wollen, können wir beispielsweise e schreiben: 'Zu zeigen ist $A = B$ '. Manchmal bietet es sich an, durch ein Extrazeichen anzuzeigen, daß $A = B$ noch nicht bewiesen ist, sondern noch gezeigt werden muß. Dazu wird ein Gleichheitszeichen mit einem Ausrufungszeichen darüber verwendet, man schreibt also

$$A \stackrel{!}{=} B$$

In diesem Fall sollte man allerdings nicht versuchen, diese Vermutung zu beweisen: Die Goldbach-Vermutung ist wohl die berühmteste, seit Jahrhunderten ungelöste Vermutung der Zahlentheorie.

1.3 Relationen zwischen und Operationen auf Mengen

Beim Umgang mit Mengen gibt es ein paar Standardbeziehungen und -operationen, die nun vorgestellt werden sollen. Eine Beziehung für Mengen haben wir schon kennengelernt: Die Elementbeziehung $x \in M$, die anzeigt, daß x ein Element der Menge M ist. Dieses ist die elementarste Beziehung, da wir im folgenden alle weiteren Beziehungen und Operationen auf die Elementbeziehung zurückführen werden.

Die nächsten beiden grundlegenden Beziehungen zwischen Mengen sind die Teilmengen- und Obermengenbeziehung. Man sagt, daß eine Menge A eine TEILMENGE einer Menge B ist, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist. Geschrieben wird das

$$A \subseteq B$$

Analog sagt man, daß A eine OBERMENGE von B ist, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist. Geschrieben wird das

$$A \supseteq B$$

Offensichtlich gilt $A \subseteq B$ genau dann, wenn $B \supseteq A$ gilt.

Wenn A eine Teilmenge von B ist, aber $A \neq B$ gilt (also es mindestens ein Element in B gibt, das nicht zu A gehört), so sagt man, daß A eine ECHTE TEILMENGE von B ist, und schreibt

$$A \subsetneq B$$

Analog ist A eine ECHTE OBERMENGE von B, wenn A eine Obermenge von B ist und es es mindestens ein Element in A gibt, das nicht zu B gehört. Das schreibt man

$$A \supsetneq B$$

Häufig findet man auch die bekannten Zeichen ‘ \subset ’ und ‘ \supset ’. Die meisten Autoren, die diese Zeichen verwenden, benutzen ‘ \subset ’ statt ‘ \subseteq ’ bzw. ‘ \supset ’ statt ‘ \supseteq ’, aber einige Autoren verwenden ‘ \subset ’ statt ‘ \subsetneq ’ bzw. ‘ \supset ’ statt ‘ \supsetneq ’. Die Bedeutung der Zeichen ‘ \subset ’ und ‘ \supset ’ ist also nicht 100% klar, aus diesem Grund werden in diesem Skript stattdessen ‘ \subseteq ’ und ‘ \supseteq ’ verwendet.

Damit sind die wichtigsten Relationen zwischen Mengen bereits vorgestellt, und es sollen nun Operationen auf Mengen besprochen werden.

Der DURCHSCHNITT zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die in A und B liegen. Das Durchschnittszeichen ist ‘ \cap ’ und wird natürlich zwischen A und B gesetzt. Mit den Sprachmitteln, die uns bereits zur Verfügung stehen, schreibt sich das wie folgt:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Nochmal zur Erklärung dieser Zeile:

$$\underbrace{A \quad \cap \quad B}_{\text{neues Zeichen}} \quad \underbrace{:=}_{\text{zeigt an, daß definiert wird}} \quad \underbrace{\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}}_{\text{Bed. fuer } x}$$

Dieser Ausdruck wird definiert Diese Menge ist der Durchschnitt von A und B

Der Durchschnitt zweier Mengen ist sozusagen die ‘Und-Verknüpfung’ von Mengen. In der Tat werden wir in Kapitel 4 ein Zeichen für das logische ‘und’ kennenlernen, das dem Durchschnittszeichen sehr ähnlich ist, nämlich ‘ \wedge ’. Mit diesem Zeichen kann man den Durchschnitt auch wie folgt beschreiben:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Aber wie gesagt, zur Logik kommen wir später.

Falls der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ist, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennt man diese Mengen DISJUNKT.

Das ‘Gegenstück’ zum Durchschnitt zweier Mengen ist deren Vereinigung. Die VEREINIGUNG zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die in A oder B liegen. Das Zeichen dafür ist ‘ \cup ’, wir definieren also:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Der Durchschnitt zweier Mengen ist sozusagen die ‘Oder-Verknüpfung’ von Mengen. Das Logikzeichen für oder ist passenderweise ‘ \vee ’, wir hätten (wenn wir das Logikvokabular schon zur Verfügung hätten), auch

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

schreiben können.

Schließlich gibt es noch die Mengendifferenz von Mengen. Der MENGENDIFFERENZ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die in A und nicht in B liegen. Das Zeichen dafür ist ‘ \setminus ’. Wir definieren also:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Das Zeichen \notin sollte selbsterklärend sein: Streicht man ein Zeichen durch, daß eine Beziehung zwischen Mengen (oder anderen Dingen) darstellt, so heißt das natürlich, daß die Beziehung gerade *nicht* gilt. Also $x \notin A$ heißt, daß x kein Element von A ist, oder $A \neq B$ heißt, daß A und B nicht gleich sind.

Beim Schneiden oder Vereinigen von Mengen kommt es offensichtlich nicht auf die Reihenfolge der Mengen an (die Operationen sind *symmetrisch*, wie der Mathematiker sagt), wir haben also immer

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{und} \quad A \cup B = B \cup A$$

für beliebige Mengen A und B . Das ist bei der Mengendifferenz in der Regel anders, d.h. es gilt normalerweise³

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

Aber es kann durchaus passieren, daß $A \setminus B = B \setminus A$ gilt, nämlich genau dann, wenn $A = B$ gilt (warum?).

Eine weitere wichtige Konstruktion ist die Bildung der Potenzmenge einer Menge. Die POTENZMENGE einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A . Das Zeichen ist ein Fraktur-P, also 'P' (jedenfalls bei den meisten Autoren: Manchmal wird auch ein kalligraphisches P, also 'P' oder sogar ein normales 'P' verwendet). Wir definieren also:

$$\mathfrak{P}(A) := \{x \mid x \subseteq A\}$$

Die Potenzmenge einer Menge wird sehr schnell sehr groß: Man kann zeigen (und das werden wir in Kapitel ?? tun), daß eine n -elementige Menge 2^n Teilmengen enthält. Für $A = \{1, 2\}$ haben wir beispielsweise

$$\mathfrak{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Für $B = \{1, 2, 3\}$ haben wir

$$\mathfrak{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Es gibt noch für den Durchschnitt und die Vereinigung alternative Schreibweisen. Diese sollen im folgenden nur für den Durchschnitt vorgestellt werden, aber es kann alles ganz natürlich auf die Vereinigung von Mengen übertragen werden.

Stellen wir uns vor, wir wollen nicht nur zwei, sondern mehr (viiiell mehr) Mengen schneiden oder vereinigen. Wir könnten beispielsweise 10 Mengen A_1, A_2, \dots, A_{10} definiert haben und wollen den Durchschnitt A all dieser Mengen bilden (also die Menge aller Elemente, die in A_1 und A_2 und A_3 und \dots und A_{10} liegen). Dieses können wir, wie bereits bei den Schreibweisen für Mengen, mit Pünktchen andeuten:

$$A := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{10}$$

Eine andere Schreibweise nutzt die Indizes der Mengen, hier also der Zahlen von 1 bis 10, aus. Dazu wird der Index durch eine Variable ersetzt, häufig i (wie 'Index') oder n (wie 'natürliche Zahl'), und man benutzt ein groß geschriebenes Durchschnittszeichen \cap , an dem unten der Beginn der Indizes und unten oder oben das Ende geschrieben wird. Also:

$$A := \bigcap_{i=1}^{10} A_i$$

beschreibt auch den Durchschnitt der Mengen A_1, A_2, \dots, A_{10} . Analog wird durch die nächste Zeile die Vereinigung der Mengen von A_3 bis A_9 definiert (in diesem Fall ist unten auch das Ende der Indizes notiert):

$$A := \bigcup_{n=3, \dots, 9} A_n$$

(Vielleicht kennen Sie diese Schreibweise von Summen oder Produkten wie $\sum_{i=1}^{10} n_i$ oder $\prod_{i=1}^{10} n_i$).

Die Schreibweise mit dem großen Durchschnittszeichen kann weiter variiert werden. Wir haben schon gelernt, daß Mengen wieder Mengen als Elemente enthalten können (die Potenzmenge ist dafür ein

³'Normalerweise' ist kein mathematischer Begriff.

gutes Beispiel). Ist M eine Menge von Mengen, so können wir den Durchschnitt all dieser Mengen bilden. Dieses wird durch ein großes \bigcap ohne weitere Beschriftungen unten oder oben dargestellt. Wir definieren also:

$$\bigcap M := \{x \mid \text{für alle } m \in M \text{ gilt } x \in m\}$$

Das verursacht zugegebenermaßen schon leichte Kopfschmerzen, da wir es hier mit einer ganzen Hierarchie von Mengen zu tun hat, und es nicht mehr leicht fällt zu verstehen, auf ‘welcher Ebene’ in dieser Hierarchie man sich befindet. Deswegen ein kleines Beispiel. Wir definieren drei Mengen

$$A_1 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad , \quad A_2 := \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \quad \text{und} \quad A_3 := \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

und setzen

$$M := \{A_1, A_2, A_3\}$$

Wenn wir M ‘ausschreiben’, gilt also

$$M = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}, \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}\}$$

Der Durchschnitt der Mengen A_1, A_2, A_3 kann nun auf folgende Arten aufgeschrieben werden:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \quad \text{oder} \quad \bigcap_{i=1}^3 A_i \quad \text{oder} \quad \bigcap_{A \in M} A \quad \text{oder} \quad \bigcap M \quad (= \{2, 4, 8\})$$

1.4 Relationen und Funktionen

Für zwei Mengen x, y definiert man das GEORDNETE PAAR von x und y , geschrieben (x, y) , wie folgt: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Die Definition als solche ist eigentlich unerheblich (bitte nicht auswendiglernen!), wichtig für geordnete Paare ist nur, daß folgendes gilt (das kann man als Übungsaufgabe zeigen):

$$(x, y) = (x', y') \quad \text{genau dann, wenn} \quad x = x' \quad \text{und} \quad y = y'$$

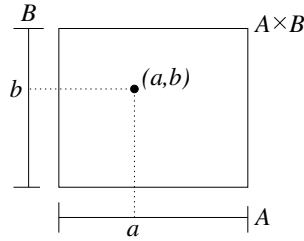
Diese Eigenschaft kann man als konstituierende Eigenschaft von geordneten Paaren verstehen. In dieser Eigenschaft liegt auch der wesentliche Unterschied zu einer simplen zweielementigen Menge: Beim geordneten Paar kommt es auf die Reihenfolge der beiden ‘Elemente’ an, bei einer Menge nicht. Ein weiterer Unterschied ist, daß es keine zweielementige Menge $\{x, x\}$ gibt (denn $\{x, x\} = \{x\}$), aber (x, x) ist ein ‘richtiges’ Paar.

Geordnete Paare und Mengen von geordneten Paaren sind das Grundgerüst für Relationen und Funktionen, wie wir sie in diesem Unterkapitel kennenlernen werden. Zunächst definieren wir das KARTE-SISCHE PRODUKT oder KREUZPRODUKT zweier Mengen A und B wie folgt:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Man kombiniert im kartesischen Produkt sozusagen sämtliche Elemente von A mit sämtlichen Elementen von B . Natürlich kommt es, wie bei Paaren, beim kartesischen Produkt auf die Reihenfolge der Faktoren an.

Das Kreuzprodukt kann man gut veranschaulichen, indem man die Mengen A und B als senkrecht zueinanderstehende Intervalle aufzeichnet. Das Kreuzprodukt ist dann gerade das Rechteck, daß durch diese beiden Intervalle beschrieben wird. Abb. 1.1 gibt diese Veranschaulichung für $A \times B$, zusammen mit einem Paar $(a, b) \in A \times B$, wider. Diese Abbildung ist natürlich nur symbolisch zu verstehen. Insbesondere wird man konkrete Mengen A und B nicht unbedingt als Intervalle aufzeichnen wollen oder können. Als Veranschaulichung leisten derartige Bilder aber gute Dienste.

Abbildung 1.1: Veranschaulichung des kartesischen Produktes $A \times B$

Analog zur Bildung von Paaren kann man natürlich auch Tripel (a, b, c) , Quadrupel (a, b, c, d) , bzw. ganz allgemein n -TUPEL (a_1, \dots, a_n) , definieren. Analog definiert man das kartesische Produkt von n Mengen A_1, \dots, A_n wie folgt:

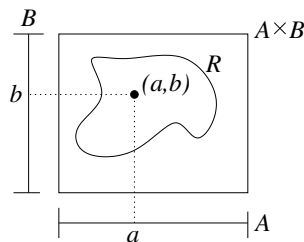
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Sind alle Faktoren A_1, \dots, A_n gleich, d.h. es gibt eine Menge A mit $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$, so schreibt man auch A^n für das kartesische Produkt, also

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}}$$

Man sollte beachten, daß wir sogar 1-Tupel (a) und das kartesische Produkt A^1 definiert haben. Streng genommen gibt es einen formalen Unterschied zwischen einem Element a und dem 1-Tupel (a) , sowie zwischen einer Menge A und der Potenz A^1 . Aber im Umgang mit diesen Mengen werden häufig Elemente a und 1-Tupel (a) sowie Mengen A und Potenzen A^1 miteinander identifiziert, d.h., man macht keinen Unterschied im Gebrauch.

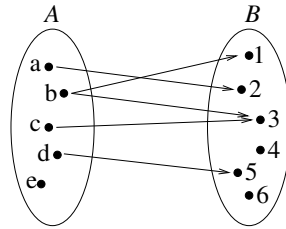
Eine RELATION R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$, also $R \subseteq A \times B$. Man kann eine Relation also so verstehen, daß sie Elemente $a \in A$ mit Elementen $b \in B$ in Beziehung, eben in Relation, setzt. Als Teilmenge von $A \times B$ liegt eine Veranschaulichung von R wie in Abb. 1.2 nahe.

Abbildung 1.2: Veranschaulichung einer Relation zwischen A und B

Eine andere mögliche Veranschaulichung ist in Abbildung 1.3 gegeben. Diese Bild veranschaulicht die Relation

$$\{(a, 2), (b, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 5)\}$$

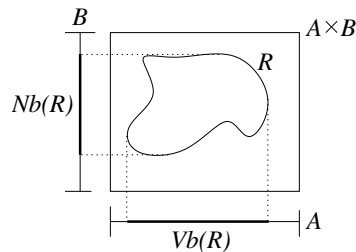
zwischen den Mengen $A := \{a, b, c, d, e\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Abbildung 1.3: Eine weitere Veranschaulichung einer Relation zwischen A und B

Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ definieren wir den VORBEREICH $Vb(R)$ und NACHBEREICH $Nb(R)$ von R wie folgt:

$$\begin{aligned} Vb(R) &:= \{a \in A \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R\} \\ Nb(R) &:= \{b \in B \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } (a, b) \in R\} \end{aligned}$$

Für unsere symbolischen Abbildungen lassen sich der Vorbereich und Nachbereich von R wie in Abb. 1.4 verdeutlichen.

Abbildung 1.4: Veranschaulichung für den Vor- und Nachbereich einer Relation zwischen A und B

Analog zu Relationen auf A und B definiert man EINE RELATION R AUF A_1, A_2, \dots, A_n als eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Für den Sonderfall, daß alle $A_i, i = 1, \dots, n$ identisch sind, wir also eine Menge A mit $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$ haben und folglich $R \subseteq A^n$ gilt, nennt man R eine n -STELLIGE RELATION AUF A . In der Regel werden wir es mit zwei-stelligen Relationen, die auch BINÄRE oder DYADISCHE RELATIONEN genannt werden, zu tun haben.

In der Regel werden wir es mit zwei-stelligen Relationen, die auch DYADISCHE RELATIONEN genannt werden, zu tun haben. Speziell zwei binäre Relationen kann man VERKNÜPFEN oder HINTEREINANDERAUSFÜHREN. Sei dazu $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation zwischen den Mengen A und B sowie $S \subseteq B \times C$ eine binäre Relation zwischen den Mengen B und C . Man setzt nun

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\}$$

Wenn wir beispielsweise eine weitere Menge $C := \{u, v, x, y, z\}$ sowie eine Relation $S \subseteq B \times C$ mit $S := \{(1, v), (2, u), (2, w), (3, v), (4, y)\}$ haben, so ergibt sich

$$R \circ S = \{(a, u), (a, w), (b, v), (c, v)\}$$

Diese Verknüpfung von Relationen läßt sich gut mit den 'Pfeildiagrammen' verdeutlichen. Für unser Beispiel ist dieses exemplarisch in Abbildung 1.5 getan.

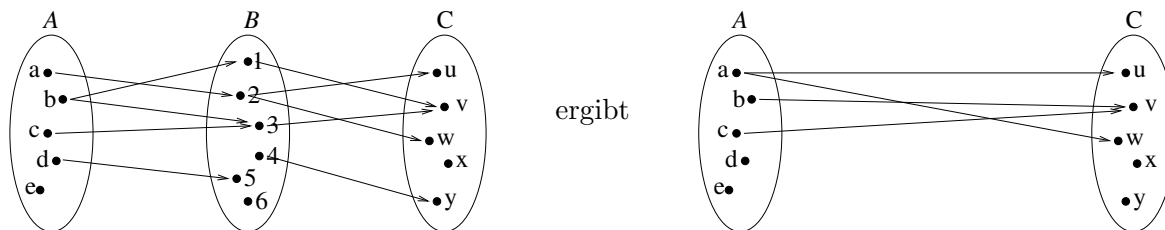


Abbildung 1.5: Veranschaulichung der Verknüpfung von Relationen

Schließlich ist die **UMKEHRRELATION** wichtig. Ist R eine Relation zwischen A und B , so ist

$$R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R \text{ die UMKEHRRELATION von } R \text{ zwischen } B \text{ und } A$$

Wir drehen sozusagen einfach alle Paare in R um, bzw. alle Pfeile in unseren Pfeildiagrammen. Deswegen ist R^{-1} auch eine Relation zwischen B und A .

Nach den Relationen ist der Begriff von *Funktionen* bzw. *Abbildungen* von elementarer Bedeutung.

Seien X und Y Mengen. Eine **FUNKTION** oder **ABBILDUNG** F VON X NACH Y kann man als Zuordnungsvorschrift verstehen, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$, daß mit $F(x)$ bezeichnet wird, zuordnet. Für eine Funktion F von X nach Y schreibt man kurz $F : X \rightarrow Y$.

Häufig wird auch die Zuordnung von $y = F(x)$ zu einem einzelnen Element X mit einem Pfeil gekennzeichnet. Man schreibt dann $x \mapsto F(x)$. Man beachte, daß hier ein etwas anderer Pfeil als bei $F : X \rightarrow Y$ benutzt wird.

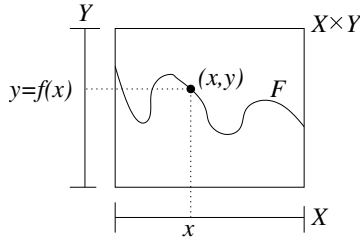
In der Regel wird man in der Tat eine Funktion durch eine konkret gegebene Zuordnungsvorschrift angeben. Beispielsweise kann man auf \mathbb{R} eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ angeben, indem man $F(x) := x^3 + 5$ schreibt. Dann entspricht der Ausdruck ‘ $= x^3 + 5$ ’ der Zuordnungsvorschrift. Aber trotzdem ist ‘eine Zuordnungsvorschrift’ hier allerdings nicht wörtlich zu verstehen. Wir haben den Begriff ‘Zuordnungsvorschrift’ schließlich auch gar nicht mathematisch definiert. Mathematisch definiert man Funktionen einfach als Relationen auf X und Y , die eine bestimmte Zusatzbedingung erfüllt, nämlich das jedes $x \in X$ nicht mit einer beliebigen Anzahl (inkl. 0) von Elementen $y \in Y$, sondern *genau einem* Element in Beziehung gesetzt wird. Man definiert also mathematisch wie folgt:

Eine **FUNKTION** F von A nach B ist eine Relation $F \subseteq A \times B$ mit $VB(F) = A$, für die zusätzlich für beliebige $a \in A$ und $b_1, b_2 \in B$ gilt:

$$\text{Aus } (a, b_1) \in F \text{ und } (a, b_2) \in F \text{ folgt } b_1 = b_2$$

Die Bedingung $VB(F) = A$ garantiert dabei, daß jedes Element aus A mit *mindestens* einem Element aus B , die zweite Bedingung, daß jedes Element aus A mit *maximal* einem Element aus B in Relation gesetzt wird.

Sei nun F eine Funktion von X nach Y . Die Funktion F setzt jedes $x \in X$ mit genau einem $y \in Y$ in Beziehung: Man sagt, daß F dem Element x das Element y **ZUORDNET**. Für zwei Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ mit $f(x) = y$ nennt man y **DAS BILD** VON x und x **EIN URBILD** VON y . Man beachte, daß wir ‘das’ Bild von x schreiben dürfen, da x durch F genau ein y mit $F(y) = x$ zugeordnet wird. Aber wir müssen ‘ein’ Urbild schreiben, da es durchaus mehrere x_1, x_2, \dots, x_n mit $F(x_1) = F(x_2) = \dots = F(x_n) = y$ geben kann. Betrachten wir dazu beispielsweise die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = x^2$. Der Zahl $x := 4$ in \mathbb{R} hat das Bild $y := 16$ unter F . Aber $y = 16$ hat nicht nur $x = 4$ als Urbild, sondern auch $x' := -4$, da auch $(-4)^2 = 16$ gilt. Deswegen ist sowohl 4 als auch -4 ein Urbild von 16.

Abbildung 1.6: Veranschaulichung einer Funktion von X nach Y

Auch Funktionen lassen sich veranschaulichen. Siehe dazu Abb. 1.6.

Man kann F nicht nur auf einzelne Elemente $x \in X$ anwenden, sondern auch auf Teilmengen $A \subseteq X$, indem man die Menge aller Bilder $f(a)$ mit $a \in A$ bestimmt. Für $A \subseteq X$ wird diese Menge wie folgt definiert:

$$F[A] := \{y \in Y \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } f(a) = y\}$$

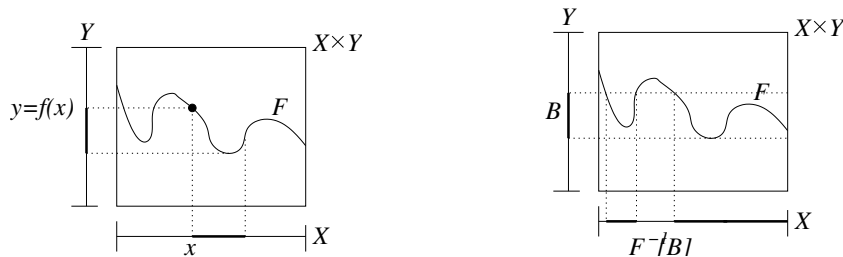
Einige Autoren schreiben auch $F(A)$ statt $F[A]$. Falls es unmißverständlich ist, daß A kein Element, sondern eine Teilmenge von X ist, ist diese Schreibweise problemlos möglich. Andernfalls sollte man besser $F[A]$ verwenden, um durch die eckigen Klammern anzuzeigen, daß kein einzelner Funktionswert, sondern eine Menge von Funktionswerten beschrieben werden soll.

Analog zu $F[A]$ kann man für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ auch die Menge der Urbilder bestimmen. Man definiert:

$$F^{-1}[B] := \{x \in X \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } f(x) = b\}$$

Auch hier schreiben einige Autoren $F^{-1}(B)$ statt $F^{-1}[B]$. Diese Schreibweise ist sogar ein wenig ungefährlicher als $F(A)$, da wir eine Funktion $f^{-1}(y)$ für einzelne $y \in Y$ gar nicht definiert haben. Und das haben wir natürlich deshalb nicht, da $f^{-1}(y)$ in der Regel nicht eindeutig bestimmt ist, wie wir gerade gesehen haben.

Auch $F[A]$ und $F^{-1}[B]$ sollen grafisch veranschaulicht werden. Siehe dazu Abb. 1.7

Abbildung 1.7: Veranschaulichungen von $F[A]$ und $F^{-1}[B]$

Schließlich kann man F auch auf eine Teilmenge $A \subseteq X$ EINSCHRÄNKEN. Dabei wird sozusagen die Zuordnungsvorschrift nicht geändert, sondern man betrachtet F nicht mehr auf ganz X , sondern nur noch auf A . Formal definieren wir:

$$F|_A := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

Schließlich gibt es noch drei wichtige Eigenschaften für Funktionen einzuführen. Wir haben bereits die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := x^2$ betrachtet und festgestellt, daß verschiedene Werte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

dasselbe Bild haben können (und deswegen konnten wir $F^{-1}(y)$ nicht sinnvoll definieren). Falls ein derartiger Fall *nicht* auftritt, so nennt man die Funktion INJEKTIV. Formal definieren wir:

$F : X \rightarrow Y$ heißt INJEKTIV, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $F(x_1) \neq F(x_2)$ gilt.

Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := x^2$ ist also offensichtlich nicht injektiv. Wenn wir aber F auf die *positiven* reellen Zahlen einschränken, so ändert sich das aber: Für $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ist $F|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ injektiv.

Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := x^2$ schöpft auch nicht den gesamten Bildbereich aus: Es gibt Zahlen $y \in \mathbb{R}$ (nämlich gerade die *negativen* reellen Zahlen), für die es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $F(x) = y$. Falls eine Funktion $F : X \rightarrow Y$ den gesamten Bildbereich Y ausschöpft, so nennt man die Funktion SURJEKTIV. Formal definieren wir:

$F : X \rightarrow Y$ heißt SURJEKTIV, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $F(x) = y$

Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := x^2$ ist also nicht surjektiv. Wenn wir den Wertebereich einschränken, kann aber die Funktion surjektiv werden: Die Funktion $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $G(x) := x^2$ ist surjektiv.

Schließlich nennen wir eine Funktion $F : X \rightarrow Y$ BIJEKTIV, falls F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispielsweise ist die Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(x) := x^3$ bijektiv. Eine Bijektion kann man sich als 1-zu-1-Entsprechung von X und Y vorstellen: Zu jedem $x \in X$ gehört genau ein $y \in Y$, nämlich gerade $y := F(x)$. Umgekehrt gehört zu jedem y mindestens ein $x \in X$ mit $F(x) = y$, aber da F injektiv ist, heißt das, dass dieses x auch eindeutig bestimmt ist. Also gehört auch zu jedem y genau ein $x \in X$ mit $F(x) = y$.

Man stelle sich diese Eigenschaften ruhig mal mit Beispielen aus dem täglichen Leben vor. Stellen wir uns eine Tanzschule vor mit Damenüberschuß. Sei X die Menge der Damen, Y die Menge der Herren. Wir könnten beispielsweise jede Dame fragen, mit welchem Herren sie am liebsten tanzen würde, und die Funktion F betrachten, die jeder Dame ihren 'Lieblingsherren' zuordnet. Da es mehr Damen als Herren gibt, wird es zwangsläufig verschiedene Damen geben, die alle denselben Lieblingsherren haben, deswegen ist die Funktion F nicht injektiv.

Nun sei aber Herrenwahl, d.h., jeder Herr fordert eine Dame zum Tanzen auf, mit der er dann tanzt. Sei $G : Y \rightarrow X$ die Funktion, die jedem Herren die Dame zuordnet, mit der er dann tanzt. Diese Funktion ist offensichtlich injektiv, (da keine Dame mit mehreren Herren gleichzeitig tanzt), aber nicht surjektiv, da einige Damen übrigbleiben, die nicht tanzen.

Wenn man aber zu einem Opernball geht (zum Beispiel zum Wiener Opernball, wenn es die Finanzen zulassen), wird man den Debütantentanz betrachten können, wo eine große Anzahl von Paaren den Eröffnungswalzer tanzen. In diesem Fall gibt es natürlich eine eindeutige Entsprechung zwischen Damen und Herren, indem man jeder Dame den männlichen Tanzpartner zuordnet. Diese Zuordnung ist eine Bijektion zwischen Damen und Herren. Anhand dieses Beispiels sieht man übrigens auch leicht, daß man in diesem Fall die Zuordnung auch umgekehrt erfolgen kann, indem wir jedem Herren den weiblichen Tanzpartner zuordnen.

Die letztgenannten Eigenschaften lassen sich auch gut mit den Pfeildiagrammen verdeutlichen. Siehe dazu die Abbildungen auf der letzten Seite dieses Kapitels (die kritischen Punkte, die eine Eigenschaft verletzen, sind dort rot gezeichnet).

Seien nun $F : X \rightarrow Y$ und $G : Y \rightarrow Z$ zwei Funktionen. Da die Werte von F im Urbildbereich von G liegen, kann man auf jeden Funktionswert $F(x)$ (mit $x \in X$) wiederum die Funktion G anwenden. D.h.,

man kann $G(F(x))$ ausrechnen. Diesen Vorgang nennt man HINTEREINANDERAUSFÜHRUNG VON F UND G . In der Tat ist die Hintereinanderausführung von Funktionen nichts anderes als die Hintereinanderausführung von Relationen. Das einzige, was hier zu beachten ist, ist die (angenehme) Tatsache, daß die Hintereinanderausführung von Funktionen in der Tat wieder eine Funktion (und nicht nur eine Relation) ergibt, was aus der gerade durchgeführten Überlegung unmittelbar einsichtig ist. Also:

$G \circ F : X \rightarrow Z$ ist die *Funktion*, die jedem $x \in X$ den Funktionswert $G \circ F(x) := G(F(x))$ zuordnet

Zum Abschluß sollen noch ein paar Möglichkeiten beschrieben werden, um Funktionen aufzuschreiben. Wir haben schon Funktionsdefinitionen gesehen, die wie folgt aussehen:

Sei $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $F(x) = x^3 + 5$.

Man kann auch folgende Alternative benutzen:

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + 5 \end{array} \right.$$

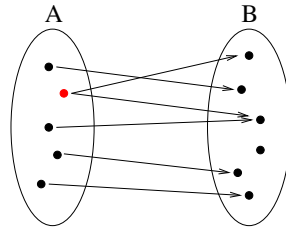
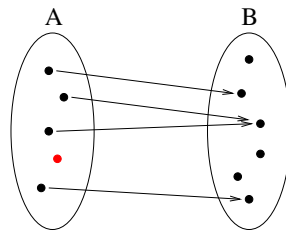
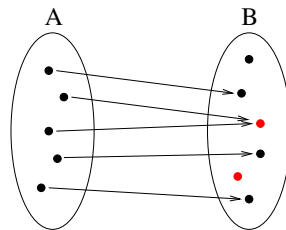
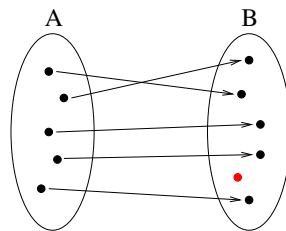
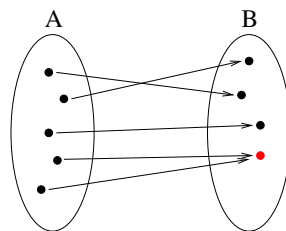
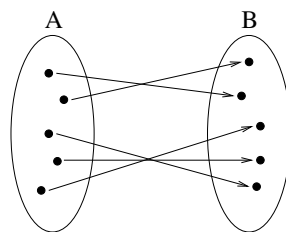
Wie man sieht, benutzt man hier eine einzelne, große Mengenklammer, die in diesem Fall aber nichts mit einer Mengenbeschreibung zu tun hat. Links davon steht der Funktionsname, rechts davon oben Urbild- und Bildmenge, unten steht die Zuordnungsvorschrift.

Die einzelne, große Mengenklammer wird auch zu einem anderen Zweck benutzt, nämlich zur Fallunterscheidung. Betrachten wir die Funktion, die jeder reellen Zahl die Quadratwurzel zuordnen soll. Das klappt aber so nicht, da aus negativen Zahlen keine Wurzel gezogen werden kann. Stattdessen wollen wir bei negativen Zahlen x die Wurzel nicht aus x , sondern aus $-x$ ziehen, da $-x$ für negative x wieder positiv ist. Wir müssen also bei Angabe der Zuordnungsvorschrift die Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$ unterscheiden. Das wird wie folgt notiert:

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $F(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Diese Möglichkeit, Fallunterscheidungen aufzuschreiben, kann natürlich mit der eben beschriebenen Methode, Funktionen aufzuschreiben, kombiniert werden. Die nächste Zeile ist also eine korrekte Möglichkeit, die Funktion F zu beschreiben.

$$F : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Abbildung 1.8: Relation zwischen A und B , aber keine FunktionAbbildung 1.9: Relation zwischen A und B , aber keine FunktionAbbildung 1.10: Funktion von A nach B , die weder injektiv noch surjektiv istAbbildung 1.11: Funktion von A nach B , die injektiv, aber nicht surjektiv istAbbildung 1.12: Funktion von A nach B , die surjektiv, aber nicht injektiv istAbbildung 1.13: Funktion von A nach B , die bijektiv (injektiv und surjektiv) ist

Kapitel 2

Relationen und Verbände

In diesem Kapitel werden zunächst im ersten Abschnitt ein paar grundlegende Eigenschaften von binären Relationen eingeführt. Mittels dieser Eigenschaften werden wir ein paar wichtige Arten oder Typen von Relationen kennenlernen. Als besonders wichtig haben sich dabei verschiedene Arten von sogenannten Ordnungsrelationen herausgestellt. Beispiele für Ordnungsrelationen ‘ist mindestens genauso groß’ oder auch ‘ist größer und stärker als’ zwischen Menschen (als Beispiele aus dem ‘wahren Leben’), oder die bekannte Ordnungsrelation ‘ \leq ’ zwischen Zahlen. Eine bestimmte Klasse von Ordnungen mit besonders schönen Eigenschaften sind schließlich die sog. Verbände, die wir in Abschnitt ?? kennenlernen werden.

2.1 Eigenschaften von Relationen

In diesem Abschnitt werden zunächst ein paar grundlegende Eigenschaften von binären Relationen eingeführt. Wir werden diese Eigenschaften anhand von Relationen aus dem ‘wahren Leben’ besprechen. Dazu betrachten wir den folgenden Vorrat an binären Relationen auf der Menge M aller Studierenden der Fachhochschule Darmstadt.

- $_ \text{ liebt } _$
- $_ \text{ ist verheiratet mit } _$
- $_ \text{ ist größer als } _$
- $_ \text{ ist mindestens genauso groß wie } _$
- $_ \text{ ist größer und stärker als } _$
- $_ \text{ ist mindestens genauso groß und stark wie } _$
- $_ \text{ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von } _ :$
- $_ \text{ kennt } _$
- $_ \text{ ist am selben Wochentag geboren wie } _$

Diese Relationen sollen im folgenden genauer untersucht werden. Doch bevor wir mit der ersten Definition starten, soll eine neue Konvention für das Aufschreiben von Relationen vorgestellt werden. Sei

dazu R eine Relation auf einer Grundmenge A , also $R \subseteq A \times A$. Für $a, b \in A$ werden wir häufig

$$xRy \text{ statt } (x, y) \in R$$

schreiben. Diese Notation ist sehr gebräuchlich. Beispielsweise ist \leq eine binäre Relation auf der Menge der reellen Zahlen, und wir schreiben in der Regel $a \leq b$ statt $(a, b) \in \leq$.

Bei einigen Relationen steht jedes Element der Grundmenge mit sich selbst in Relation. Die Relation \leq ist ein einfaches Beispiel dafür, da $r \leq r$ für jede reelle Zahl r gilt. Derartige Relationen nennen wir REFLEXIV. Formal definieren wir:

Definition 2.1 (Reflexiv) Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt REFLEXIV, falls aRa (also $(a, a) \in R$) für jedes $a \in A$ gilt.

Betrachten wir dazu einige Relationen aus unserem Beispielvorrat.

- $_ \text{ liebt } _$: Nicht jede Person liebt sich selbst, deswegen ist diese Relation nicht reflexiv.
- $_ \text{ ist verheiratet mit } _$: Keine Person ist mit sich selbst verheiratet, deswegen ist diese Relation nicht reflexiv.
- $_ \text{ ist größer als } _$: Keine Person ist größer als sie selbst, deswegen ist diese Relation nicht reflexiv.
- $_ \text{ kennt } _$: Jede Person kennt sich selbst, also ist diese Relation reflexiv.
- $_ \text{ ist am selben Wochentag geboren wie } _$: Jede Person ist am selben Wochentag geboren wie sie selbst, also ist diese Relation reflexiv.

Die Relation ‘lieben’ ist bereits deswegen nicht reflexiv, weil nicht jede Person sich nicht selbst liebt. Es kann aber trotzdem Personen geben, die sich selber lieben. Damit die Relation nicht reflexiv ist, reicht es aus, das mindestens eine Person sich nicht selbst liebt. Bei der Relation ‘ist verheiratet mit’ ist die Situation anders: Dort gibt es *gar keine* Person, die mit sich selbst verheiratet ist. Diese Eigenschaft einer Relation ist also stärker als nicht reflexiv zu sein. Eine Relation mit dieser Eigenschaft nennen wir IRREFLEXIV. Formal definieren wir:

Definition 2.2 (Irreflexiv) Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt IRREFLEXIV, falls $(a, a) \notin R$ für jedes $a \in A$ gilt.

Wir betrachten erneut einige Relationen aus unserem Beispielvorrat.

- $_ \text{ liebt } _$: Es gibt Personen, die sich selbst lieben, deswegen ist diese Relation nicht irreflexiv.
- $_ \text{ ist verheiratet mit } _$: Keine Person ist mit sich selbst verheiratet, deswegen ist diese Relation irreflexiv.
- $_ \text{ ist größer als } _$: Keine Person ist größer als sie selbst, deswegen ist diese Relation irreflexiv.

Offensichtlich kann keine irreflexive Relation auf einer nichtleeren Menge reflexiv sein. Die Eigenschaften ‘reflexiv’ und ‘irreflexiv’ schließen sich also gegenseitig aus. Andererseits kann es durchaus Relationen geben, die zwar nicht reflexiv sind, aber trotzdem noch nicht irreflexiv sind. Als Beispiel

haben wir die Relation 'lieben' kennengelernt. Wir können natürlich auch ein mathematisches Beispiel entwerfen: Für die Menge $A := \{1, 2\}$ ist die Relation $\{(1, 1)\}$ weder reflexiv (also nicht reflexiv), noch irreflexiv. Man könnte, hinreichend informal, sagen, daß irreflexiv das 'totale Gegenteil' von reflexiv ist. Aber das soll nur eine kleine Gedankenstütze sein und keine formale Definition.

Bei dieser Überlegung ist es allerdings wichtig, daß wir *nichtleere* Mengen betrachten, wie wir uns nun überlegen wollen. Auf der leeren Menge gibt es nur eine Relation, nämlich die leere Relation (warum?). Nennen wir diese Relation R . Diese ist auf der leeren Menge reflexiv, da jedes Element der leeren Menge mit sich selbst in Relation steht. Es mutet vielleicht seltsam an, daß wir von allen Elementen der leeren Menge sprechen. Aber strenggenommen gibt es keinen Grund, das nicht zu tun. Warum steht nun jedes Element der leeren Menge mit sich selbst in Relation? Stellen wir die Frage anders: Kann es sein, daß wir ein Element der leeren Menge finden, daß *nicht* mit sich selbst in Relation R steht? Natürlich nicht, da wir *überhaupt kein* Element in der leeren Menge finden, also finden wir erst recht keines, daß noch eine zusätzliche Bedingung –hier: mit sich selbst in Relation R zu stehen– erfüllt. Wir sehen also, daß sozusagen jedes Element der leeren Menge jede beliebige Bedingung erfüllt.

Dieses Argument können wir aber genauso gut auf die Eigenschaft 'steht *nicht* mit sich selbst in Relation' anwenden. Und wir stellen fest, daß auch jedes Element der leeren Menge nicht mit sich selbst in Relation R steht. Damit ist die leere Relation R auf der leeren Menge gleichzeitig reflexiv und irreflexiv.

Das ist natürlich ein etwas abartiger Sonderfall, der nur für die leere Relation auf der leeren Menge zutrifft. In der Tat werden derartige Situationen von Mathematikern manchmal als 'pathologisch' bezeichnet. Aber hier zeigt sich eine weitere Besonderheit der Mathematik: Dort werden alle Begrifflichkeiten, alle Definitionen etc. bis an ihre Grenzen ausgelotet, und auch derartige pathologische Fälle (und nicht nur 'schöne' Beispiele) müssen untersucht werden.

Nach dieser Überlegung wollen wir nun eine weitere grundlegende Eigenschaft von Relationen einführen, nämlich die der SYMMETRIE. Wir definieren:

Definition 2.3 (Symmetrisch) Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt SYMMETRISCH, falls $(b, a) \in R$ für jedes $(a, b) \in R$ gilt.

Offensichtlich ist eine Relation R genau dann symmetrisch, wenn $R = R^1$ gilt. Auch hier helfen einige Beispiele zum Verständnis.

- $_ \text{ liebt } _$: Es kann passieren, daß eine Person a in eine Person b verliebt ist, aber b diese Liebe nicht erwidert. Deswegen ist die Relation 'lieben' (zum Leidwesen aller unglücklich Verliebten) nicht symmetrisch.
- $_ \text{ ist verheiratet mit } _$ ist offensichtlich eine symmetrische Relation.
- $_ \text{ ist größer als } _$: Wenn eine Person a größer als eine Person b ist, wird es nie zutreffen, daß dann auch b größer als a ist. Diese Relation ist also insbesondere nicht symmetrisch.
- $_ \text{ ist mindestens genauso groß wie } _$: Auch diese Relation ist nicht symmetrisch, da es sicherlich zwei Personen a und b gibt, so daß a größer als b ist. Dann ist a auch mindestens genauso groß wie b , aber b ist nicht mindestens genauso groß wie a .
- $_ \text{ ist am selben Wochentag geboren wie } _$ ist offensichtlich symmetrisch.

Ähnlich wie bei der Reflexivität von Relationen reicht es aus, ein einziges Gegenbeispiel zu finden, damit eine Relation nicht symmetrisch wird. Beispielsweise ist die Relation 'lieben' nicht symmetrisch,

da es bestimmt einige unglücklich verliebte Personen gibt, aber natürlich gibt es auch Paare (a, b) von Personen a und b , die sich gegenseitig lieben. Andererseits gibt es in der Relation 'ist größer als' kein einziges Paar (a, b) in dieser Relation, so daß auch (b, a) in der Relation steht. Relationen mit dieser Eigenschaft nennen wir ASYMMETRISCH. Wir definieren also:

Definition 2.4 (Asymmetrisch) *Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt ASYMMETRISCH, falls $(b, a) \notin R$ für jedes $(a, b) \in R$ gilt.*

Offensichtlich ist eine Relation R genau dann asymmetrisch, wenn $R \cap R^{-1} = \emptyset$ gilt.

Das Verhältnis reflexiv-irreflexiv ist also ähnlich dem Verhältnis symmetrisch-asymmetrisch: Asymmetrisch ist sozusagen das 'totale Gegenteil' von symmetrisch. Insbesondere ist jede asymmetrische Relation auf einer nichtleeren Menge nicht symmetrisch, aber eine nicht symmetrische Relation ist nicht automatisch asymmetrisch. Es gibt hierbei auch leider wieder den pathologischen Fall der leeren Relation auf der leeren Menge zu betrachten: Das ist die einzige Relation, die gleichzeitig symmetrisch und asymmetrisch ist.

Betrachten wir wieder einige Beispiele:

- $_ \text{ liebt } _ :$ Diese Relation ist aufgrund der obigen Begründung nicht asymmetrisch.
- $_ \text{ ist verheiratet mit } _ \text{ ist}$ offensichtlich eine symmetrische Relation, also insbesondere nicht asymmetrisch.
- $_ \text{ ist größer als } _ :$ Wenn eine Person a größer als eine Person b ist, wird es nie zutreffen, daß dann auch b größer als a ist. Diese Relation ist also asymmetrisch.
- $_ \text{ ist mindestens genauso groß wie } _ :$ Diese Relation ist weder symmetrisch noch asymmetrisch.
- $_ \text{ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von } _ :$ Auch diese Relation ist weder symmetrisch noch asymmetrisch.

Die letzten beiden Beispiele verdienen eine genauere Betrachtung. Dazu bedarf es einer kurzen Ausführung.

Wir haben in der Definition für die Asymmetrie die Zeile 'falls $(b, a) \notin R$ für jedes $(a, b) \in R$ '. Dabei setzen wir aber nicht voraus, daß a und b verschieden sind. Wir dürfen damit insbesondere diese Definition für den Fall $a = b$ anwenden. Damit erfüllt eine asymmetrische Relation insbesondere auch die Bedingung

$$\text{falls } (a, a) \in R, \text{ so folgt } (a, a) \notin R$$

Diese Bedingung klingt auf den ersten Blick widersprüchlich, aber sie ist es nicht (die Definition kann ja auch gar nicht komplett widersprüchlich sein, da wir ein Beispiel für eine asymmetrische Relation gefunden haben). Falls es ein Element $a \in A$ mit $(a, a) \in R$ gibt, so folgte $(a, a) \notin R$, was in diesem Fall tatsächlich einen Widerspruch gibt. Eine asymmetrische Relation kann also kein Paar (a, a) enthalten. Damit haben wir folgenden kleinen Hilfssatz (was auch 'Lemma' genannt wird):

Lemma 2.5 (Aus Asymmetrie folgt Irreflexivität) *Sei R eine asymmetrische Relation auf einer Menge A . Dann ist R auch irreflexiv.*

Was bedeutet das nun für unsere letzten beiden Beispiele? Beide Relationen sind offensichtlich reflexiv, d.h. wir haben aRa für beliebige Elemente (also Personen) a . Damit sind sie insbesondere nicht asymmetrisch. Die Paare (a, a) in den Relationen verletzen die Bedingung der Asymmetrie.

Bei der Relation ‘ist mindestens genauso groß wie’ kann es auch weitere Beispiele geben, die die Asymmetrie-Bedingung verletzen, nämlich Paare (a, b) verschiedener Personen a und b , die gleich groß sind. Bei dem letzten Beispiel, also bei der Relation ‘_ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von _’ sind aber die Paare (a, a) die *einzigsten* Beispiele aus der Relation, die die Asymmetrie verletzen. Zwei *verschiedene* Personen a und b haben immer verschiedene Matrikelnummern. Damit kann es nicht passieren, daß die Matrikelnummer von a mindestens genauso groß ist wie die Matrikelnummer von b und umgekehrt. Es gilt sogar noch mehr: Wenn wir die Matrikelnummern MNr_a und MNr_b von a bzw. b haben, und wenn sowohl $MNr_a \leq MNr_b$ als auch $MNr_b \leq MNr_a$ gelten, so können wir auf $MNr_a = MNr_b$ und damit auch auf $a = b$ schließen. Diese Überlegung führt zum Begriff der ANTISYMMETRIE, die wie folgt definiert wird:

Definition 2.6 (Antisymmetrisch) Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt ANTISYMMETRISCH, falls $a = b$ aus aRb und bRa folgt.

Bevor wir uns wieder ein paar Beispiele anschauen, soll erneut ein kleines Lemma gezeigt werden.

Lemma 2.7 (Aus Asymmetrie folgt Antisymmetrie) Sei R eine asymmetrische Relation auf einer Menge A . Dann ist R auch antisymmetrisch.

Begründung: Eine asymmetrische Relation enthält nie gleichzeitig die Paare (a, b) und (b, a) für zwei (nicht notwendig verschiedene) Elemente a und b . Damit kann natürlich die Bedingung für die Antisymmetrie nie verletzt werden, da diese Bedingung nur auf derartige Paare angewandt wird. Das ist eine ähnliche Überlegung wie in der Begründung, daß die leere Relation auf der leeren Menge sowohl reflexiv als auch irreflexiv ist: Die Bedingung für die Antisymmetrie wird nicht verletzt, da wir –wegen der Antisymmetrie– keine Elemente a und b finden mit aRb und bRa , und damit erst recht nicht mit aRb und bRa und $a \neq b$. Wir finden keine Gegenbeispiele, die die Antisymmetrie verletzen.

Betrachten wir nun einige Beispiele:

- $_$ liebt $_$: Es gibt Paare verschiedener Personen, die sich gegenseitig lieben, also ist diese Relation nicht antisymmetrisch.
- $_$ ist größer als $_$: Diese Relation ist asymmetrisch, also auch antisymmetrisch.
- $_$ Es gibt Paare (a, b) verschiedener Personen, die gleich groß sind, d.h. a ist insbesondere mindestens genauso groß wie b , und b ist mindestens genauso groß wie a . Damit ist diese Relation nicht antisymmetrisch.
- $_$ ist mindestens genauso groß und stark wie $_$: Es ist zu vermuten, daß es Paare (a, b) verschiedener Personen gibt, die gleich groß und gleich stark sind. Damit ist diese Relation wie im letzten Beispiel nicht antisymmetrisch.

Dieses Beispiel ist aber etwas diffizil: Falls je zwei verschiedene Personen sich in der Größe oder in der Stärke (oder beidem) unterscheiden, würde diese Relation doch antisymmetrisch sein. In diesem Skript wird aber davon ausgegangen, daß das nicht zutrifft (die FH hat so viele Studierende, daß es bestimmt zwei gleich große und starke Personen darunter zu finden sind).

- $_$ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von $_$: Diese Relation ist zwar nicht asymmetrisch, aber aufgrund der obigen Überlegung antisymmetrisch.

Einige der vorgestellten Beispiele ermöglichen ist, die Studierenden zu ‘ordnen’ oder zu ‘sortieren’. Beispielsweise könnte man alle Studierende der Größe nach aufstellen. Das Konzept einer Ordnung wird

im nächsten Abschnitt präzisiert, aber die nächste Eigenschaft wird sich als eine wichtige Eigenschaft einer Ordnung herausstellen.

Definition 2.8 (Transitiv) *Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt TRANSITIV, falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in A$ auch $(a, c) \in A$ folgt.*

- $_$ liebt $_$ Wenn a b liebt und b c liebt, so muß a noch lange nicht c lieben (und dafür werden wir sicherlich Beispiele unter den FH-Studierenden finden). Also ist diese Relation nicht transitiv.
- $_$ ist verheiratet mit $_$: a mit b verheiratet ist und b mit c verheiratet ist, so muß insbesondere $a = c$ gelten. Da aber keine Person mit sich selbst verheiratet ist, kann diese Relation nicht transitiv sein.
- $_$ ist größer als $_$: Wenn a größer ist als b und b wiederum größer ist als c , so ist sicherlich a größer als c . Also ist diese Relation transitiv.
- $_$ ist mindestens genauso groß wie $_$ Wenn a mindestens genauso groß ist wie b und b mindestens genauso groß ist wie c , so ist sicherlich a mindestens genauso groß ist wie c . Also ist diese Relation transitiv.
- $_$ ist am selben Wochentag geboren wie $_$: Auch diese Relation ist transitiv.

Um Personen der Größe nach aufzustellen, reicht es nicht aus, daß die Relation ‘ist größer als’ (oder ‘ist mindestens genauso groß wie’) transitiv ist. Wesentlich ist, daß wir je zwei Personen der Größe nach vergleichen können. Das ist zum Beispiel nicht bei der Relation ‘ist mindestens genauso groß und stark wie’ gegeben: Es kann passieren, daß wir zwei Personen a und b haben, so daß a zwar größer ist als b , aber b trotzdem stärker als a ist. Diese beiden Personen lassen sich bezüglich dieser Relation nicht miteinander vergleichen. Eine Relation, wo je zwei Elemente vergleichbar sind, nennen wir KONNEX.

Definition 2.9 (Konnex) *Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt KONNEX, falls $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$ für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt.*

Auch diese Definition soll anhand von Beispielen erläutert werden.

- $_$ liebt $_$ Es wird sicherlich zwei verschiedene Personen a und b geben, so daß weder a b noch b a liebt. Also ist diese Relation nicht konnex.
- $_$ ist größer als $_$: Es gibt zwei verschiedene, aber gleichgroße Personen a und b . Da weder a größer als b noch b größer als a ist, ist diese Relation nicht konnex.
- $_$ ist mindestens genauso groß wie $_$ Bei zwei verschiedenen Personen a und b ist a mindestens genauso groß ist wie b oder b mindestens genauso groß ist wie a (vielleicht auch beides, wenn sie gleich groß sind). Damit ist diese Relation konnex.
- $_$ ist am selben Wochentag geboren wie $_$: Diese Relation ist nicht konnex.

In der nächsten Tabelle sind alle Beispielrelationen und alle in diesem Teilkapitel vorgestellten Eigenschaften von Relationen noch einmal zusammenfassend dargestellt.

	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch	transitiv	konnex
liebt							
ist verheiratet mit		x	x				
ist größer als		x		x	x	x	
ist mindestens genauso groß wie	x					x	x
ist größer und stärker als		x		x	x	x	
ist mindestens genauso groß und stark wie	x					x	
hat eine Matrikelnummer, die ...	x				x	x	x
kennt	x						
ist am selben Wochentag geboren wie	x		x			x	

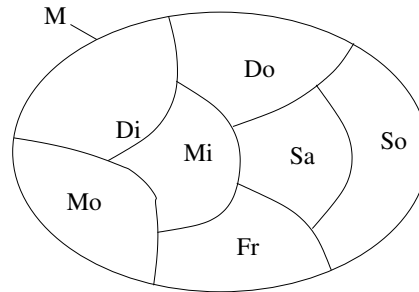
Die Eigenschaften der Relationen sicherlich nicht voneinander unabhängig: In den Lemmata 2.5 und 2.7 haben wir bereits Implikationen zwischen zwei verschiedenen Eigenschaften von Relationen gesehen. Beispielsweise ist jede asymmetrische Relation auch irreflexiv. In der Tabelle erkennen wir das daran, daß in jeder Zeile, die ein Kreuz in der Spalte für Asymmetrie hat (das sind nur die Zeilen 'ist größer als' und 'ist größer und stärker als'), auch in der Spalte für Irreflexivität ein Kreuz eingetragen ist. Allerdings ist beispielsweise auch in jeder Zeile, die ein Kreuz in der Spalte 'konnex' hat, auch ein Kreuz in der Spalte 'transitiv', d.h. für unsere Beispiele gilt auch die Implikation 'konnex \Rightarrow transitiv'. Diese Implikation ist allerdings sicherlich nicht für alle Relationen gültig. Ein simples Gegenbeispiel ist die Relation $R := \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ auf der Menge $\{1, 2, 3\}$, die offensichtlich konnex ist, aber nicht transitiv. Diese Liste an Beispielen ist also in einem gewissen Sinn noch nicht repräsentativ für alle Relationen. In der Formalen Begriffsanalyse werden wir eine Methode, genannt 'Merkmalsexploration' kennenlernen, mit minimalen Aufwand eine derartige Tabelle so zu ergänzen, daß die Beispiele in der Tat repräsentativ sind, also jede Implikation zwischen Eigenschaften der Beispiele automatisch für alle weiteren denkbaren Gegenstände zutreffen, und diese Methode speziell auf die Eigenschaften von Relationen anwenden. Dazu später mehr.

2.2 Äquivalenzrelationen und Partitionen

Die Relation 'ist am selben Wochentag geboren wie' aus dem letzten Teilkapitel ist ein Beispiel einer Klasse von Relationen, die in diesem Teilkapitel behandelt werden sollen. Betrachten wir zunächst, wie wir diese Relation auf der Grundmenge, also der Menge M aller Studierenden der Fachhochschule Darmstadt. Wir können uns diese Menge einteilt vorstellen in sieben Teilmengen, eine Teilmenge für die Menge der Sonntagskinder, eine Teilmenge für die Menge der Montagskinder, etc., bis zur Teilmenge der Samstagskinder. Eine Veranschaulichung dieser Situation wird in Abbildung 2.1 gezeigt.

Wir können uns problemlos ähnliche Unterteilungen vorstellen, beispielsweise:

1. Die Menge aller natürlichen Zahlen in die Teilklassen 'gerade Zahlen und ungerade Zahlen'.
2. Die Menge aller natürlichen Zahlen, einteilt durch die Relation 'gibt beim Teilen durch 10 denselben Rest wie' (beispielsweise sind 13 und 423 in der selben Klasse, oder 7 und 4397, oder 16 und 26 und 1656, etc. Die im ersten Beispiel genannte Unterteilung kann analog verstanden werden als beschrieben durch die Relation 'gibt beim Teilen durch 2 denselben Rest wie'.

Abbildung 2.1: Veranschaulichung einer Partition der Menge M

3. Die Menge der Studierenden der Fachhochschule Darmstadt, unterteilt in die Klassen 'männlich' und 'weiblich'.
4. Die Menge aller Kinder einer Grundschule nach der Relation 'geht in dieselbe Klasse wie'.

Solchen Unterteilungen haben alle die selbe wesentliche Eigenschaft: Bei jeder dieser Unterteilungen liegt jedes Element der Grundmenge in *genau einer* der Teilmengen der Unterteilung. Dieses Verständnis einer Unterteilung wollen wir mathematisch fassen.

Eine solche Unterteilung wird PARTITION genannt. Wir haben gesehen, daß eine Partition eine gegebene Grundmenge in Teilmengen unterteilt. Genau genommen können wir inhaltlich eine Partition mit der Menge dieser Teilmengen identifizieren. Mathematisch wird man deshalb sinnvollerweise eine Partition einer Grundmenge A als eine Menge von Teilmengen von A verstehen. Als Menge von Teilmengen von A ist eine Partition also eine Teilmenge der Potenzmenge von A (die, wir erinnern uns, *alle* Teilmengen von A enthält). Wir geben der Partition den Namen P : Damit ist nun $P \subseteq \mathfrak{P}(A)$. Natürlich ist nicht *jede* Menge von Teilmengen von A eine Partition: Wir müssen natürlich die oben genannte wesentliche Eigenschaft von Unterteilungen noch mathematisch erfassen. Jedes Element aus A liegt in genau einer der Teilmengen der Partition. Es ist einfacher, diese Bedingung in die beiden Teilbedingungen 'liegt in mindestens einer der Teilmengen der Partition' und 'liegt in höchstens einer der Teilmengen der Partition' aufzuteilen.

Die Bedingung 'liegt in mindestens einer der Teilmengen der Partition' läßt sich folgendermassen elegant formulieren: $A = \bigcup P$ (wir erinnern uns: $\bigcup P$ ist die Menge aller Elemente, die in mindestens einem Element von P , also einer der Teilmengen der Partition, liegen).

Die Bedingung 'liegt in höchstens einer der Teilmengen der Partition' bedeutet, daß sich keine zwei Teilmengen der Partition 'überlappen' dürfen. Mit anderen Worten: Ihr Durchschnitt muß leer sein. Mathematisch kann man das wie folgt notieren: Für alle $A_1, A_2 \in P$ mit $A_1 \neq A_2$ gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Schließlich wird es sich noch als sinnvoll erweisen, die leere Menge als Teilmenge in einer Partition auszuschließen. Zusammenfassend definieren wir also:

Definition 2.10 (Partition) Eine Teilmenge $P \subseteq \mathfrak{P}(A)$ heißt PARTITION, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\emptyset \notin P$
2. Für alle $A_1, A_2 \in P$ mit $A_1 \neq A_2$ gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $A = \bigcup P$

Wir sind zu Partitionen gekommen, als wir uns die Wirkung der Relation 'ist am selben Wochentag geboren wie' auf die Grundmenge aller FH Studierenden betrachtet haben. Auch andere Relationen, die zu Partition führen, wurden bereits als Beispiele genannt (z.B. die Relation 'geht in dieselbe Klasse wie' auf der Menge aller Kinder einer Grundschule). Ähnlich wie wir die Eigenschaften einer Partition mathematisch erfaßt haben, wollen wir uns nun die spezifischen Eigenschaften der 'partitionserzeugenden' Relationen erarbeiten. Diese Relationen werden wir später ÄQUIVALENZRELATIONEN nennen. War ja klar, bei der Überschrift vom Teilkapitel, oder?

Sei dazu \sim eine im naiven Sinne partitionserzeugende Relation auf A , also $\sim \subseteq A$ (das Zeichen ' \sim ' ist als Zeichen für Äquivalenzrelationen gebräuchlich, deswegen wird es hier schon benutzt). Diese Relation \sim erzeugt eine Partition P auf der Menge A . Um anzuzeigen, daß diese Partition von \sim abhängt (d.h., daß verschiedene partitionserzeugende Relationen auch verschiedene Partitionen erzeugen), bezeichnen wir die Partition genauer mit P_\sim . Wir hängen denn die Teilmengen der P_\sim von \sim ab? Zwei Elemente von A sollen genau dann zur selben Teilmenge in der Partition P gehören, wenn sie in der Relation \sim stehen.

Umgekehrt können wir aus jeder Partition P auch eine Relation \sim_P erzeugen (da auch hier natürlich die erzeugte Relation von der Partition abhängt, wird auch hier ein Index eingesetzt). Zwei Elemente aus A stehen genau dann in Relation \sim_P , wenn sie zur selben Teilmenge in der Partition gehören. Da wir Partitionen schon mathematisch definiert haben, können wir –im Gegensatz zu P_\sim – auch \sim_P mathematisch definieren und untersuchen. Zur Definition von \sim_P :

Definition 2.11 (Äquivalenzrelation einer Partition) Sei P eine Partition auf A . Wir setzen:

$$\sim_P := \{(x_1, x_2) \in A \mid \text{es gibt eine (Partitions-)Teilmenge } p \in P \text{ mit } x_1 \in p \text{ und } x_2 \in p\}$$

Eine derartige von einer Partition P erzeugte Relation \sim_P hat immer drei spezifische Eigenschaften:

1. \sim_P ist reflexiv: Sei a irgendein Element aus A . Aufgrund der Bedingung $A = \bigcup P$ gibt es ein $p \in P$ mit $a \in p$. Für dieses p gilt $a \in p$ und $a \in p$, also nach Definition von \sim_P gilt $a \sim_P a$ (Taschenspielertrick: Wir haben in der Definition von \sim_P einfach a sowohl für x_1 als auch für x_2 eingesetzt). Da also $a \sim a$ für jedes beliebige $a \in A$ gilt, ist \sim_P reflexiv.
2. \sim_P ist symmetrisch: Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \sim_P a_2$. D.h. es gibt ein p mit $a_1 \in p$ und $a_2 \in p$. Da logischerweise auch $a_2 \in p$ und $a_1 \in p$ gilt (wieder ein Taschenspielertrick: Wir vertauschen die Rollen von x und y), folgt auch $a_2 \sim_P a_1$. Da a_1 und a_2 beliebig waren, ist \sim_P damit symmetrisch.
3. \sim_P ist transitiv: Seien a_1, a_2, a_3 in A mit $a_1 \sim_P a_2$ und $a_2 \sim_P a_3$. Es gibt also $p, q \in P$ mit $a_1, a_2 \in p$ und $a_2, a_3 \in q$. Insbesondere liegt a_2 sowohl in p als auch in q . Aber kein Element kann in *verschiedenen* Teilmengen in der Partition liegen. In der Tat müssen p und q dieselbe Menge sein: Wären sie verschieden, so wäre ihr Schnitt leer (das ist die zweite Bedingung für Partitionen in Definition 2.10). Das kann aber nicht sein, da $a_2 \in p \cap q$. Wir haben also $p = q$. Damit liegen auch a_1 und a_3 in derselben Menge, es folgt also $a_1 \sim_P a_3$.

In der Tat sind es genau die reflexiven, symmetrischen und transitiven Relationen, die partitionserzeugend sind. Formal definieren wir also:

Definition 2.12 (Äquivalenzrelation) Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt ÄQUIVALENZRELATION, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wie sehen die Klassen, also die Mengen der zugehörigen Partition, einer Äquivalenzrelation aus? Jedes Element a der Grundmenge A liegt in genau der Partitionsmenge, nämlich derjenigen Menge, die aus allen Elementen besteht, die gerade mit a in Relation \sim stehen. Betrachten wir beispielsweise die Relation ‘ $_$ ist am selben Wochentag geboren wie $_$ ’, so besteht die Partition aus in sieben Teilmengen, wie wir am Anfang dieses Unterkapitels beschrieben haben. Wenn beispielsweise Michael Mustermann ein Montagskind, so gehört er zur Menge aller Montagskinder, also der Personen, die am selben Wochentag wie Michael Mustermann geboren sind. Diese Idee soll nun formal gefaßt werden.

Definition 2.13 (Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation) Sei $\sim \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Zu jedem $a \in A$ heißt

$$[a]_{\sim} := \{x \in A \mid x \sim a\}$$

die ÄQUIVALENZKLASSE VON a .

Lemma 2.14 (Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation) Sei $\sim \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, seien $a, b \in A$. Dann sind die Äquivalenzklassen $[a]_{\sim}$ und $[b]_{\sim}$ entweder identisch oder disjunkt.

Beweis: Wir nehmen an, daß $[a]_{\sim}$ und $[b]_{\sim}$ nicht disjunkt sind. Es ist zu zeigen, daß sie dann bereits identisch sind, also $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$ gilt. Da $[a]_{\sim}$ und $[b]_{\sim}$ nicht disjunkt sind, finden wir ein Element $c \in [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim}$. D.h. nach Def. der Äquivalenzklassen gilt $c \sim a$ und $c \sim b$. Da \sim symmetrisch ist, gilt auch $a \sim c$.

Sei nun $x \in [a]_{\sim}$ ein beliebiges Element der Äquivalenzklasse von a , d.h. es gilt $x \sim a$. Da auch $a \sim c$ gilt und da \sim transitiv ist, folgt $x \sim c$. Wir haben auch $c \sim b$, also erhalten wir, wiederum mit der Transitivität von \sim , auch $x \sim b$. Es folgt also $x \in [b]_{\sim}$. Da x ein beliebiges Element war, gilt damit $[a]_{\sim} \subseteq [b]_{\sim}$.

Ganz analog können wir auch $[b]_{\sim} \subseteq [a]_{\sim}$ zeigen. Zusammen mit $[a]_{\sim} \subseteq [b]_{\sim}$ folgt damit $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$. \square

Damit erfüllen die Äquivalenzklassen die wesentliche Eigenschaft einer Partition P , nämlich die zweite Eigenschaft aus Def. 2.10. Andererseits gilt natürlich $a \in [a]_{\sim}$ für jede Äquivalenzklasse $[a]_{\sim}$, da \sim reflexiv ist. Damit ist jede Äquivalenzklasse nichtleer, und jedes Element $a \in A$ liegt einer Äquivalenzklasse. Das sind die anderen beiden Eigenschaften aus Def. 2.10, womit gezeigt wurde, daß die Menge aller Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation auf A tatsächlich eine Partition von A ergeben. Die folgende Definition ist also erlaubt:

Definition 2.15 (Partition einer Äquivalenzrelation) Sei $\sim \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Die zu \sim gehörende Partition ist:

$$P_{\sim} := \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$$

Wir haben gesehen, daß jeder Partition eine entsprechende zugeordnet werden kann (Def. 2.11), sowie daß umgekehrt jeder Äquivalenzrelation eine Partition zugeordnet werden kann (Def. 2.15). Partitionen und Äquivalenzrelationen sind damit zwei verschiedene, mathematische Modellierungen derselben Grundidee: Man hat eine gegebene Grundmenge und eine Eigenschaft für die Elemente der Grundmenge, und man teilt die Grundmenge in die Teilmengen von Elementen, die alle dieselbe Eigenschaft haben, ein. In diesem Sinne kann man Äquivalenzrelation als ‘verallgemeinerte Gleichheitsrelationen’ verstehen: Man betrachtet zwei Elemente $a, b \in A$ unter einem bestimmten Gesichtspunkt als gleich, nämlich in dem Verständnis, daß sich a und b bezüglich der genannten Eigenschaft nicht unterscheiden.

2.3 Ordnung ist das halbe Leben

Unter unseren Beispielrelationen stechen ein paar heraus, nach denen sich die Studierenden in einer bestimmten Weise anordnen lassen könnten, da sich die Studierenden nach bestimmten Kriterien vergleichen lassen. Diese Relationen sind:

- $_$ ist größer als $_$
- $_$ ist mindestens genauso groß wie $_$
- $_$ ist größer und stärker als $_$
- $_$ ist mindestens genauso groß und stark wie $_$
- $_$ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von $_$

Beispielsweise ließen sich die Studierenden aufsteigend nach ihrer Größe, was beides mit den ersten beiden Relationen ginge, oder aufsteigend nach ihrer Matrikelnummer anordnen. Derartige Relationen sind beispielsweise für das Erstellen von Listen sehr praktisch, da man die Einträge der Listen nach bestimmten Kriterien sortieren kann. Beispielsweise werden anonymisierte Aushänge mit Noten einer Klausur in der Regel aufsteigend nach den Matrikelnummern erstellt. In diesem Unterkapitel werden wir derartige Relationen mathematisch beschreiben.

Bei der mathematischen Ausarbeitung derartiger Relationen sind einige Dinge zu beachten. Die ersten beiden Relationen kommen von derselben Idee, nämlich Studierende nach ihrer Größe zu ordnen. Der Unterschied liegt in der Behandlung *gleich großer* Personen: Bei der Relation ' $_$ ist größer als $_$ ' stehen diese nicht in Relation, bei der Relation ' $_$ ist mindestens genauso groß wie $_$ ' hingegen schon. Derartige Unterscheidungen werden bei der mathematischen Modellierung zu berücksichtigen sein. Es ist auch zu beachten, daß bei der Relation ' $_$ ist mindestens genauso groß wie $_$ ' es durchaus passieren kann, daß zwei Personen gleich groß sind, sich also bezüglich dieser Relation nicht unterscheiden lassen. Bei der Relation ' $_$ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von $_$ ' hingegen kann ein derartiger Fall nicht auftreten, da verschiedene Personen auch verschiedene Matrikelnummern haben.

Nicht alle Beispielrelationen erlauben eine *lineare* Anordnung wie bei den eben besprochenen Relationen, auch wenn sie Kriterien bieten, nach denen sich Studierende vergleichen lassen. So kann es bei der Relation 'ist größer und stärker als $_$ ' passieren, daß es zwei Studierende x_1 und x_2 gibt, sodaß zwar x_1 größer als x_2 , aber x_2 stärker als x_1 gibt. Diese Studierenden sind gewissermaßen unvergleichbar.

Die bisherige Diskussion zeigt, daß es keinen eindeutigen, sich mehr oder weniger zwangsläufigen mathematischen Zugang zu Ordnungen gibt, da unsere Beispielordnungen verschiedene Eigenschaften haben. Aus diesem Grund werden wir mehrere Arten von Ordnungen mit diesen verschiedenen Eigenschaften mathematisch definieren.

Bereits im letzten Teilkapitel wurde gesagt, daß Transitivität die wichtigste Eigenschaft einer Ordnung ist (Beispiel: 'wenn A größer ist als B, und wenn B größer ist als C, dann ist auch A größer als C'). Jede Art von Ordnung, die wir im folgenden definieren, ist eine transitive Relation.

Betrachten wir die beiden Relationen ' $_$ ist mindestens genauso groß wie $_$ ' anstatt der irreflexiven Relation ' $_$ ist größer als $_$ ', die es beide erlauben, Studierende nach ihrer Größe anzuordnen. Beide Relationen sind offensichtlich transitiv. Die erste Relation ist zusätzlich reflexiv (jeder Studierende ist mindestens genauso groß wie er selbst), die zweite Relation hingegen irreflexiv (kein Studierender größer als er selbst). In der Mathematik hat es sich die erste Variante durchgesetzt, d.h. es hat

sich etabliert, bei Ordnungen immer Reflexivität vorauszusetzen. Eine Relation mit diesen beiden Eigenschaften –Reflexivität und Transitivität– ist die allgemeinste Form einer Ordnungsrelation und wird QUASIORDNUNG genannt.

Wir wir bereits am Beispiel der Quasiordnung ' $_$ ' ist mindestens genauso groß wie ' $_$ ' sehen, kann es aber noch passieren, daß wir zwei gleichgroße Studierende s_1 und s_2 haben. Nennen wir diese Relation R . Es kann also, mathematisch ausgedrückt, folgendes passieren: $x_1 R x_2$ und $x_2 R x_1$. Betrachten wir ' $_$ ' hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von ' $_$ ' als zweite Relation, und nennen wir diese Relation S . Offensichtlich sind sowohl R als auch S reflexiv und transitiv, aber S erfüllt noch eine weitere Eigenschaft: Verschiedene Studierende haben verschiedene Matrikelnummern, also für verschiedene Studierende x_1, x_2 kann es nicht passieren, daß $x_1 S x_2$ und $x_2 S x_1$ gilt. Andersrum ausgedrückt: $x_1 S x_2$ und $x_2 S x_1$ kann nur vorkommen, falls es sich bei x_1 und x_2 in Wirklichkeit um dieselbe Person handelt, wir also $x_1 = x_2$ haben. Diese Eigenschaft haben wir bereits mathematisch definiert: Es ist die Antisymmetrie von Relationen. Damit ist S nicht nur reflexiv und transitiv, sondern auch antisymmetrisch. Derartige Relationen werden HALBORDNUNGEN oder einfach ORDNUNGEN genannt.

Schließlich haben wir bereits festgestellt, daß nicht jede unserer Beispielrelationen eine *lineare* Anordnung erlaubt. Betrachten wir die Relation ' $_$ ' ist mindestens genauso groß und stark wie ' $_$ '. Diese Relation ist eine Halbordnung, doch sie erlaubt es nicht, je zwei Studierende in der richtigen Reihenfolge anzuordnen, da es unvergleichbare Studierende gibt. Relationen, wo derartiges nicht passieren kann, haben wir bereits definiert: Es handelt sich um konnexe Relationen. Eine konnexe Halbordnung ist in der Tat eine Halbordnung, die einer eindeutigen, linearen Sortierung entspricht. Derartige Halbordnungen werden TOTALE ORDNUNGEN, LINEARE ORDNUNGEN oder auch manchmal KETTEN genannt.

Formal definieren wir also:

Definition 2.16 (Quasiordnung und (Halb)ordnung) Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation.

- R heißt QUASIORDNUNG (AUF A), falls R reflexiv und transitiv ist.
- R heißt HALBORDNUNG ODER ORDNUNG (AUF A), falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- R heißt TOTALE ORDNUNG (AUF A), falls R eine Halbordnung und zusätzlich konnex ist.

Zwei Elemente $a, b \in A$ heißen VERGLEICHBAR, wenn aRb oder bRa gilt.

Für Ordnungen wird häufig das Zeichen \leq benutzt. In diesem Fall schreibt man auch $a < b$, falls $a \leq b$ und $a \neq b$ gilt.

Häufig werden gleichzeitig Grundmenge und Relation zusammen als Halbordnung angegeben. Man schreibt dann 'Sei (A, \leq) eine Halbordnung' und meint damit, daß \leq eine Halbordnung auf der Menge A ist.

In Abbildung 2.2 ist die Definition als Tabelle zusammengefaßt. Weiterhin ist ein Diagramm gegeben, was den Inhalt der Tabelle darstellt. Das Lesen dieses Diagrammes wird noch erläutert werden.

	Reflexiv	Symmetrisch	Antisymmetrisch	Transitiv	Konnex
Quasiordnung	x			x	
Halbordnung	x		x	x	
lin. Ordnung	x		x	x	x
Äquivalenzrel.	x	x		x	

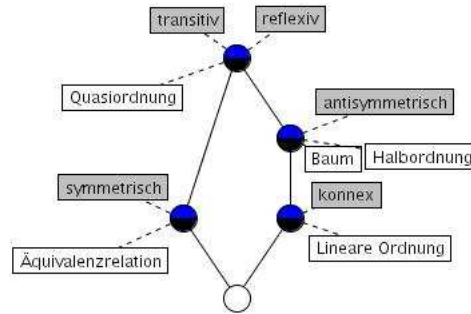


Abbildung 2.2: Arten von Relationen und ihre Eigenschaften

Im Folgenden werden wir vier mathematische Beispiele für Ordnungen betrachten, und zwar:

1. Die reellen Zahlen mit der ‘normalen Kleiner-Gleich-Relation’ \leq .

Wir setzen also $O_1 := (\mathbb{R}, \leq)$.

2. Die Zahlen von 1 bis 10 mit der ‘normalen Kleiner-Gleich-Relation’ \leq .

Wir setzen also $O_2 := (\{1, 2, \dots, 10\}, \leq)$.

3. Die Zahlen von 1 bis 10 mit der Teilbarkeitsrelation $|$.

Wir setzen also $O_3 := (\{1, 2, \dots, 10\}, |)$.

4. Alle Teiler von 180 mit mit der Teilbarkeitsrelation $|$.

Wir setzen also $O_4 := (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}, |)$.

Anhand dieser Beispiele werden wir die nächsten Definitionen erklären. Wir beginnen mit der NACHBARSCHAFTSRELATION, die wie folgt definiert wird:

Definition 2.17 (Nachbarschaftsrelation) Sei \leq eine Halbordnung auf A , seien $a, b \in A$. Dann heißt b OBERER NACHBAR VON a UND a UNTERER NACHBAR VON n , falls $a \leq b$ gilt, es aber kein c mit $a < c < b$ gibt.

Ein oberer Nachbar b von a ist also ein Element, was ‘direkt’ über a liegt. Davon kann es keinen, einen, oder auch mehrere geben. Beispielsweise gilt:

1. In O_1 hat 2 weder untere noch obere Nachbarn.
2. In O_2 ist 3 der obere Nachbar von 2, und 1 ist der untere Nachbar von 2.
3. In O_3 und O_4 sind 4 und 6 die oberen Nachbarn von 2, und 1 ist der untere Nachbar von 2.

Relationen sind in der Regel nicht transitiv, aber jede Relation R läßt sich eindeutig zu einer kleinsten transitiven Relation T erweitern, nämlich zu der sogenannten TRANSITIVEN HÜLLE von R . Das ist wie folgt zu verstehen: T ist transitiv und T erweitert R , also $T \supseteq R$, und jede andere transitive Relation T' mit $T' \supseteq R$ ist eine Obermenge von T .

Definition 2.18 (Transitive Hülle) Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Die TRANSITIVEN HÜLLE T von R ist wie folgt definiert:

$$T := \{(a, b) \in A \times A \mid (a, b) \in R \text{ oder es gibt Elemente } x_1, \dots, x_n \in A \\ \text{mit } aRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{n-1}Rx_n \text{ und } x_nRb\}$$

Die Idee hinter dieser Definition ist recht simpel: Eine Relation ist transitiv, wenn aus aTb und bTc auch aTc folgt. Mit anderen Worten: Wenn bereits (a, b) und (b, c) zur Relation gehören, so auch (a, c) . Sind also a, b, c Elemente von A mit aRb und bRc , so muß jede transitive Relation $T' \supseteq R$ auch das Paar (a, c) enthalten. Wir erweitern also R , indem wir einfach derartige Paare (a, c) zur Relation hinzufügen.

Warum haben wir nicht einfach folgende Definition benutzt?

$$T := \{(a, b) \in A \times A \mid (a, b) \in R \text{ oder es gibt ein Element } c \in A \text{ mit } aRc \text{ und } cRb\} \quad (2.1)$$

Wenn wir T so definiert hätten, müßte T noch nicht transitiv sein. Wir könnten beispielsweise mit einer Relation R auf einer vierelementigen Menge $A := \{a, b, c, d\}$ starten, die wie folgt aussieht: $R := \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$. Wenn wir T einfach wie in (2.1) definiert hätten, würden wir $T = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, c), (b, d)\}$ erhalten, da wir die Paare (a, c) und (b, d) zu R hinzufügen. Aber diese neuen Paare müssen ja auch bei der Transitivitätsüberprüfung von T betrachtet werden. Wir haben aber $(a, c) \in T$ und $(c, d) \in T$, aber nicht $(a, d) \in T$. Das *einmalige* Ausführen von dem Hinzufügen neuer Paare wie in (2.1) reicht also nicht aus. Erst bei einer zweiten Anwendung des Schritts in (2.1) würden wir auch $(a, d) \in T$ erhalten. Es gibt natürlich auch Beispiele, wo auch nicht zwei Anwendungen des Schritts in (2.1) nicht ausreichen (bei einer fünfelementigen Menge $A' := \{a, b, c, d, e\}$ und einer Relation $R' := \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e)\}$ brauchten wir drei Schritte, etc). Also müßten wir den Schritt in (2.1) so lange ausführen, bis wir tatsächlich eine transitive Relation erhalten. Dieses iterierte Anwenden von (2.1) haben wir uns erspart, indem wir in Def. 2.18 nicht einfach ein c mit aRc und cRb betrachtet haben, sondern stattdessen gleich endlich viele Elemente $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $aRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, \dots, x_{n-1}Rx_n$ und x_nRb .

Im endlichen Fall wird eine Halbordnung bereits dadurch ausreichend beschrieben, wenn wir nur die Nachbarschaftsrelation kennen: Die Halbordnung ist die transitive Hülle der Nachbarschaftsrelation. Dieses soll nun kurz erläutert werden. Sei dazu (A, \leq) eine endliche Halbordnung, und seien $a, b \in A$ mit $a < b$. Wenn a nicht bereits ein unterer Nachbar von b ist, können wir ein Element c mit $a < c < b$ finden. Allgemeiner können wir sagen, daß wir Elemente $x_1, \dots, x_n \in A$ finden mit

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$$

Was können wir über diese Elemente x_1, \dots, x_n aussagen, wenn wir sie so ausgesucht haben, daß diese Kette möglichst lang wird, d.h. n maximal wird? In diesem Fall muß a ein unterer Nachbar von x_1 , x_1 ein unterer Nachbar von x_2 , ..., und schließlich x_n ein unterer Nachbar von b sein. Warum ist das so? Wenn zum Beispiel a kein unterer Nachbar von x_1 wäre, könnten wir ja noch ein c zwischen a und x_1 finden, also ein c mit $a < c < x_1$. Wir könnten also unsere Kette zu

$$a < c < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$$

verlängern, im Widerspruch dazu, daß die Kette $a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n < b$ bereits maximale Länge haben sollte.

Etwas salopp ausgedrückt: Gilt $a < b$ in der endlichen Halbordnung (A, \leq) , so gelangen wir von a nach b , indem wir uns nur über obere Nachbarn von a nach b 'hochhangeln'. Mathematisch wird das zunächst in einem Lemma festgehalten:

Lemma 2.19 (Nachbarschaftsrelation erzeugt Ordnung) Sei $\leq \subseteq A \times A$ eine Halbordnung auf der endlichen Menge A . Sei die zu \leq gehörende Nachbarschaftsrelation, also

$$R := \{(a, b) \mid a \text{ ist unterer Nachbar von } b \text{ bezüglich der Relation } \leq\}$$

Dann ist \leq gerade die transitive Hülle von R .

Dieses Lemma gibt uns eine elegante Möglichkeit, endliche Halbordnungen als Diagramme darzustellen. Wir müssen nämlich nicht alle Paare (a, b) mit $a \leq b$ darstellen, es reicht stattdessen, sich nur auf Paare von Nachbarn zu beschränken. Eine endliche Halbordnung kann nun wie folgt visualisiert werden:

1. Jedes Element a von A wird als kleiner Kreis gezeichnet, der mit dem Namen a versehen wird. Die Kreise werden so in der Ebene angeordnet, daß für zwei Elemente a, b mit $a < b$ der Kreis von b höher als der von a liegt.
2. Sind a, b zwei Elemente der Ordnung, so daß a ein unterer Nachbar von b ist, so wird der Kreis von a mit einer Linie mit dem Kreis von b verbunden.

Ein derartiges Diagramm wird HASSE-DIAGRAMM der Ordnung genannt. Für die endlichen Ordnungen O_2 , O_3 und O_4 sind in Abb. 2.3 mögliche Hasse-Diagramme gezeigt.

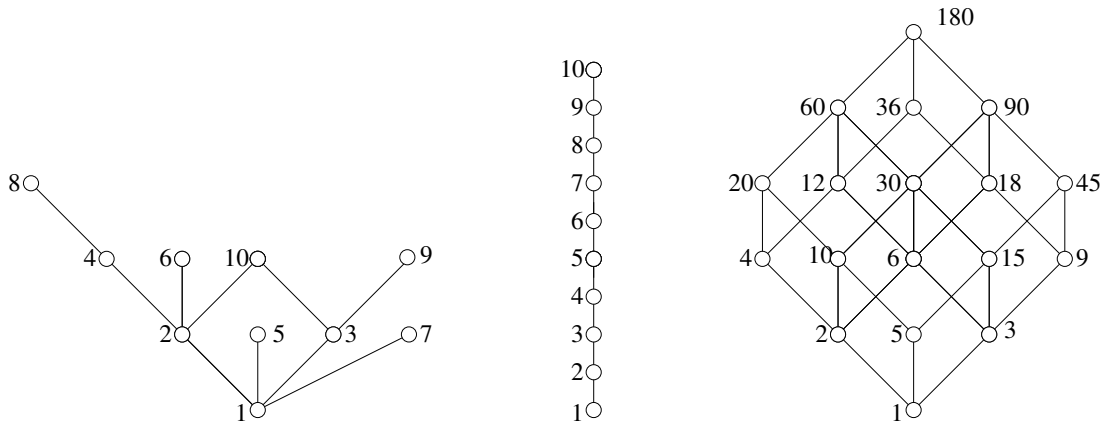


Abbildung 2.3: Hasse-Diagramme der Ordnungen O_2 , O_3 , O_4

Anhand von O_2 wollen wir die nächsten wichtigen Begriffe motivieren. Offensichtlich ist 1 das kleinste Element der Ordnung, da alle anderen Elemente oberhalb der 1 liegen (das liegt natürlich daran, daß 1 jede natürliche Zahl teilt). Aber es gibt kein absolut größtes Element in O_2 , das über allen anderen liegt. Stattdessen gibt es verschiedene Elemente, nämlich 5, 6, 7, 8, 9 und 10, die von keinem anderen Element übertroffen werden. Aus diesem Grund unterscheidet man zwischen GRÖSSTEN und MAXIMALEN, sowie zwischen KLEINSTEN und MINIMALEN Elementen. Wir definieren diese Begriffe für jede Teilmenge einer Halbordnung wie folgt:

Definition 2.20 (Schranken, Maximale/Minimale Elemente, Kleinste/Größte Elemente)
 Sei \leq eine Halbordnung auf A , sei $B \subseteq A$, sei \leq eine Halbordnung auf A .

Ein Element $x \in A$ nennt man OBERE SCHRANKE VON b , falls $b \leq x$ für jedes $b \in B$ gilt. Ein Element $x \in A$ nennt man UNTERE SCHRANKE VON b , falls $x \leq b$ für jedes $b \in B$ gilt.

Ein Element $x \in B$ nennt man EIN MAXIMALES ELEMENT VON B , falls es kein $b \in B$ gibt mit $x < b$.
 Ein Element $x \in B$ nennt man EIN MINIMALES ELEMENT VON B , falls es kein $b \in B$ gibt mit $b < x$.

Ein Element $x \in B$ nennt man DAS GRÖSSTE ELEMENT VON B , falls $b \leq x$ für jedes $b \in B$ gilt.
 Ein Element $x \in B$ nennt man DAS KLEINSTE ELEMENT VON B , falls $x \leq b$ für jedes $b \in B$ gilt.

In der Literatur wird manchmal ein größtes Element ein MAXIMUM und ein kleinstes Element ein MINIMUM genannt. Dann besteht aber eine recht große Verwechslungsgefahr zwischen den verschiedenen Begriffen MAXIMALES ELEMENT und MAXIMUM bzw. MINIMALES ELEMENT und MINIMUM. Aus diesem Grund wird in diesem Skript diese Bezeichnungsweise nicht verwendet.

Als nächstes sollen ein paar einfache Zusammenhänge zwischen maximalen und größten Elementen geklärt werden. Diese Zusammenhänge können natürlich ganz analog auf minimale und kleinste Elemente übertragen werden: Wir beschränken uns der Einfachheit halber nur auf maximale und größte Elemente. Sei im folgenden (A, \leq) eine Halbordnung und sei $B \subseteq A$.

1. B kann beliebig viele obere Schranken haben. Jede obere Schranke s von B mit $s \in B$ ist automatisch ein maximales Element von B .
2. B kann beliebig viele maximale Elemente enthalten. Alle maximalen Elemente sind paarweise unvergleichbar.

Begründung: Wir haben schon mit O_2 eine Halbordnung mit sechs maximalen Elementen gesehen. Man kann sich leicht andere Halbordnungen mit beliebigen Anzahlen maximaler Elemente überlegen.

Sind nun m_1, m_2 zwei maximale Elemente, so kann weder $m_1 < m_2$ gelten, weil sonst m_1 nicht maximal wäre, noch kann $m_2 < m_1$ gelten, weil sonst m_2 nicht maximal wäre. Damit sind zwei verschiedene maximale Elemente unvergleichbar.

3. Aber B kann höchstens ein größtes Element besitzen. Aus diesem Grund reden wir in diesem Fall auch von *dem* größten Element von B .

Begründung: Wir nehmen an, es gäbe zwei größte Elemente g_1 und g_2 . Da g_1 größtes Element von B ist, liegt es über jedem anderen Element, also insbesondere auch über g_2 . Wir haben also $g_2 \leq g_1$. Andererseits, da g_2 auch ein größtes Element ist, liegt g_2 auch über jedem anderen Element, also insbesondere auch über g_1 . Wir haben also auch $g_1 \leq g_2$. Nun kann, da \leq antisymmetrisch ist, der Fall $g_2 \leq g_1$ und $g_1 \leq g_2$ nur für $g_1 = g_2$ eintreten. Es kann also keine zwei *verschiedenen* größten Elemente geben.

4. Ist g das größte Element von B , so ist g auch ein maximales Element von B , und in diesem Fall gibt es keine weiteren maximalen Elemente.

Begründung: Sei x ein beliebiges Element von B . Da g das größte Element von B ist, folgt $x \leq g$. Damit kann aber nicht auch $b < x$ gelten. Folglich ist b ein maximales Element. Jedes Element von B ist mit g vergleichbar. Ein weiteres *maximales* Element wäre aber nicht mit g vergleichbar, also es neben g keine weiteren maximalen Elemente in B geben.

5. Ist B endlich, und ist $b \in B$, so gibt es ein maximales Element $m \in B$ mit $b \leq m$. Insbesondere enthält, wenn $B \neq \emptyset$ gilt, ein maximales Element.

Begründung: Wenn b_0 bereits ein maximales Element ist, so sind wir fertig. Falls b_0 nicht maximal ist, gibt es ein $b_1 \in B$ mit $b_0 < b_1$. Falls b_1 nun maximal ist, sind wir fertig. Falls b_1 nicht maximal ist, gibt es ein $b_2 \in B$ mit $b_1 < b_2$. etc ... Dieses Verfahren muß nach endlich vielen Schritten abbrechen, da B endlich ist. Das $m := b_n$ aus dem letzten Schritt des Verfahrens ist das gesuchte maximale Element von B mit $b \leq m$.

2.4 Verbände

Im letzten Teilkapitel haben wir einige Halbordnungen als Beispiele herangezogen. Eine ‘besonders schöne Ordnung’ war dabei die Ordnung O_4 , bestehend aus allen Teilern der 180 mit der Teilbarkeitsrelation $|$ als Ordnung. In diesem Beispiel gibt es nämlich zwei Operationen, die sehr eng mit der Ordnung zusammenhängen, nämlich die Operationen ggT und kgV , die jeder endlichen Menge n_1, \dots, n_k von Zahlen

- ihren größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k)$ und
- ihren kleinsten gemeinsamen Vielfachen $\text{kgV}(n_1, \dots, n_k)$

zuordnen. Diese Operationen haben besondere Eigenschaften, die für den ggT erläutert werden sollen:

- Einerseits ist $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k)$ ein Teiler von n_1, \dots, n_k , also in der Sprache der Halbordnungen eine *untere Schranke* von n_1, \dots, n_k
- Andererseits wird ist jeder andere Teiler von n_1, \dots, n_k auch von $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k)$ geteilt. In der Sprache der Halbordnungen: Jede weitere untere Schranke von n_1, \dots, n_k , also jeder weitere Teiler von n_1, \dots, n_k , liegt unterhalb von $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k)$. Der ggT ist halt –nomen est omen– der größte gemeinsame Teiler, daß heißt die größte untere Schranke.

Analog ist $\text{kgV}(n_1, \dots, n_k)$ die kleinste obere Schranke von n_1, \dots, n_k .

Halbordnungen mit dieser Eigenschaft werden VERBÄNDE genannt. Formal definieren wir:

Definition 2.21 (Untere/Obere Schranke, Infimum/Supremum) Sei (A, \leq) eine Halbordnung, sei $B \subseteq A$.

Zur Erinnerung: $x \in A$ heißt EINE OBERE SCHRANKE VON B , falls $b \leq x$ für jedes $b \in B$ gilt. Analog heißt $x \in A$ EINE UNTERE SCHRANKE VON B , falls $x \leq b$ für jedes $b \in B$ gilt.

Sei nun B^\uparrow die Menge aller oberen Schranken von B , und sei B_\downarrow die Menge aller unteren Schranken von B . Besitzt B^\uparrow ein kleinstes Element s , so nennt man s das SUPREMUM von B . Besitzt umgekehrt B_\downarrow ein größtes Element i , so nennt man i das INFIMUM von B . Wir schreiben auch:

$$s = \bigvee B \quad \text{und} \quad i = \bigwedge B$$

Ist $B = \{a, b\}$ eine zweielementige Menge, so schreiben wir auch

$$s = b_1 \vee b_2 \quad \text{und} \quad i = b_1 \wedge b_2$$

Man vergleiche diese Notation mit $m_1 \cup m_2$ und $\bigcup M$ sowie $m_1 \cap m_2$ und $\bigcap M$.

Sei nun (V, \leq) ein Verband. Wir wollen drei recht simple Fakten festhalten:

1. Ist V vollständig, dann hat V ein kleinstes Element und ein größtes Element, nämlich $\perp := \bigwedge V$ und $\top := \bigvee V$.

2. Andererseits gilt dann $\bigwedge \emptyset = \top$ und $\bigvee \emptyset = \perp$.

Begründung: Die Menge der oberen Schranken von \emptyset ist gerade V , denn ist $v \in V$ beliebig, dann liegt v trivialerweise über jedem Element von \emptyset . Damit ist $\bigvee \emptyset$ das kleinste Element von V , also \perp . Eine analoge Begründung liefert $\bigwedge \emptyset = \top$.

3. jeder endliche Verband ist vollständig.

Ist (V, \leq) ein Verband, so sind \wedge und \vee Funktionen auf V . Damit wird, quasi durch die Hintertür, von einer Menge mit einer *Relation* (nämlich \leq) zu einer Menge mit zwei *Funktionen*. Diese Funktionen haben ganz spezifische Eigenschaften, die sich aus den Eigenschaften von Verbänden ableiten lassen. Im einzelnen gilt:

Sind $a, b, c \in V$, so gelten folgende Gesetze:

Kommutativität	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativität	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
Idempotenz	$(a \wedge a) = a$	$a \vee a = a$
Absorption	$(a \wedge b) \vee a = a$	$(a \wedge b) \vee a = a$

Andererseits gilt folgendes: Ist V eine Menge mit zwei Operationen \wedge und \vee , die die obigen Eigenschaften erfüllen, so gibt es tatsächlich eine Halbordnung \leq auf V , so daß \vee die aus \leq abgeleitete Supremumsoperation und \wedge die entsprechende Infimumsoperation ist.

Wir haben also eine ähnliche Situation wie bei Äquivalenzrelationen und Partitionen vorliegen: Verbände können auf zwei verschiedene Arten definiert werden: Einerseits

- als Menge (V, \leq) mit einer Halbordnung \leq , die bestimmte Zusatzeigenschaften erfüllt, oder
- als Struktur (V, \wedge, \vee) bestehend aus einer Menge V und zwei Operationen \wedge, \vee , sie bestimmte Eigenschaften erfüllen.

Wenn es notwendig ist, zwischen diesen beiden Sichten zu unterscheiden, werden wir deshalb auch von **VERBÄNDEN IM SINN** und **VERBÄNDEN IM ALGEBRAISCHEN SINN** sprechen.¹

Wie man bei einem Verband zwischen seiner ordnungstheoretischen und algebraischen Notation hin- und herspringen kann, sagt das folgende Lemma.

Lemma 2.22 (Verbände können ordnungstheoretisch oder algebraisch definiert werden)

Ist (V, \wedge, \vee) ein Verband im algebraischen Sinn, so wird durch

$$a \leq b \quad :\iff \quad a \vee b = b \quad (\iff \quad a \wedge b = a)$$

eine Halbordnung auf V definiert, so daß (V, \leq) ein Verband im ordnungstheoretischen Sinn definiert wird.

Ist umgekehrt (V, \leq) ein Verband im ordnungstheoretischen Sinn, so ist (V, \wedge, \vee) der dazugehörige Verband im algebraischen Sinn.

¹Es wäre einfacher, von ordnungstheoretischen und algebraischen Verbänden zu sprechen, aber der Begriff *algebraische Verbände* ist bereits für Verbände mit noch weiteren, bestimmten Einschränkungen vergeben.

Beispiele für Verbände:

- Zu jeder natürlichen Zahl n ist $T_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k|n\}$, zusammen mit der Teilbarkeitsrelation $|$ als Halbordnung, ein Verband. Es gilt dann:

$$a \vee b = \text{kgV}(a, b) \quad \text{und} \quad a \wedge b = \text{ggT}(a, b)$$

- Zu jeder Menge A ist $\mathfrak{P}(A)$, zusammen mit der Teilmengenbeziehung \subseteq als Halbordnung, ein Verband. Es gilt dann:

$$a \vee b = a \cup b \quad \text{und} \quad a \wedge b = a \cap b$$

Kapitel 3

Formale Begriffsanalyse und Begriffsverbände

Siehe ausgeteiltes Skript.

Kapitel 4

Logik

4.1 Aussagenlogik

Startpunkt der Aussagenlogik: Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind (also genau einen der beiden Wahrheitswerte annehmen).

Definition 4.1 (Aussagenvariablen, Alphabet) *Das Alphabet der Aussagenlogik besteht aus folgenden Zeichen:*

1. $AV := \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ heißt die Menge der Aussagenvariablen
2. Die Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ heißen (logische) Junktoren
3. Außerdem benötigen wir die Klammern (und).

Statt den indizierten Buchstaben A_i werden wir auch häufig die Buchstaben A, B, C, D, E für Aussagenvariablen benutzen. Manchmal werden wir auch B, C, D, E indizieren.

Definition 4.2 (Form) *Die Formeln der Aussagenvariablen werden induktiv definiert.*

1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
2. Sind F, F_1, F_2 Formeln, so auch $\neg F, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2)$, und $(F_1 \leftrightarrow F_2)$.

Diese Definition legt fest, was ‘ordentliche’ Formeln sind und was unsinnige Zeichenfolgen. Sie entspricht der ‘Grammatik’ der Aussagenlogik. In der Sprache der Mathematik wird die Grammatik auch als *Syntax* bezeichnet. Mit der Definition gewinnen wir beispielsweise sukzessive folgende Formeln:

1. $A_1, A_2, A_3, \dots, B, C, D, E$
2. $(A \wedge B), \neg A, \neg B, (B \vee C), (B \rightarrow D), (E \rightarrow E)$
3. $\neg(A \wedge B), ((B \vee C) \wedge \neg B), ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \vee C)), (\neg A \vee \neg B), ((E \rightarrow E) \rightarrow (E \rightarrow E))$
4. $((B \vee C) \wedge \neg B) \vee ((B \rightarrow D) \rightarrow (B \vee C)), (\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$

5. ...

Eine wichtige Eigenschaft der AL ist, daß ihre Formeln eindeutig lesbar sind, d.h., man kann einer Formel ansehen, wie sie mit der letzten Definition gebildet wurde. Dazu wurden die Klammern benötigt: Beispielsweise ist die Formel $((A \vee B) \wedge C)$ entstanden, indem man *zuerst* A und B zu $(A \vee B)$ verknüpft hat, und *dann* diese Formel wiederum mit C zu $((A \vee B) \wedge C)$ verknüpft hat. Hätten wir die Klammern weggelassen, wäre also $A \vee B \wedge C$ eine ‘ordentliche’ Formel, so könnten wir dieser Formel *nicht* ansehen, ob zuerst die \wedge und dann die \vee -Verknüpfung angewendet wurde, oder ob es umgekehrt gemacht wurde.

Um unnötig viele Klammern zu ersparen, wird –ähnlich der Regel ‘Punktrechnung vor Strichrechnung’– eine Reihenfolge für die Junktoren festgelegt. Sie lautet: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Damit dürfen wir beispielsweise $A \vee B \wedge C$ schreiben und meinen damit $(A \vee (B \wedge C))$ (und nicht $((A \vee B) \wedge C)$).

Die *Semantik*, d.h. die Bedeutung, von Formeln ist ihre Interpretation mit Wahrheitswerten. Dazu werden zunächst Belegungen definiert.

Definition 4.3 (Belegung)

Wir setzen $B := \{w, f\}$. Eine Belegung ν ist eine Abbildung $\nu : AV \rightarrow B$.

Die Zeichen w und f stehen natürlich für die Wahrheitswerte ‘wahr’ und ‘falsch’. Manchmal fügt man zu dem Alphabet entsprechende Zeichen hinzu, die genau diese Wahrheitswerte auf syntaktischer vertreten. D.h., zusätzlich zu den Aussagenvariablen hat man zwei Symbole \top, \perp , und man fordert, daß $\nu(\top) = w$ und $\nu(\perp) = f$ für jede Belegung ν gilt.

Belegungen werden nun auf alle Formeln der AL erweitert. Dazu werden Wahrheitstabellen benutzt, die angeben, wie die einzelnen Junktoren interpretiert werden.

A	$\neg A$
w	f
f	f

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Aufgrund der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln können wir Belegungen eindeutig auf alle Formeln erweitern. Das soll an einem Beispiel erläutert werden. Wir betrachten dazu die Formel $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

$$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

f	w	w	w	w	f	w	f	f	w
w	w	f	f	w	f	w	w	w	f
w	f	f	w	w	w	f	w	f	w
w	f	f	f	w	w	f	w	w	f
3	1	2	1	7	4	1	6	5	1

Die letzte Zeile gibt an, in welcher Reihenfolge die Spalten ausgefüllt worden sind. Die Spalte Nummer 7 gibt die Wahrheitswerte der Formel für die vier Belegungen von A und B an. Wir sehen, daß die Formel immer gültig ist.

Als nächstes betrachten wir $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$.

$$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$$

w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	f
w	w	f	w	w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	f	w	f	f
f	f	f	w	w	f	f	f	f	w	w
f	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f
1	3	1	2	1	6	1	4	1	5	1

In Spalte 6 finden wir zweimal f, also ist diese Formel nicht immer gültig (deswegen kommt auch auch auf die richtige Klammerung von Formeln an, da sich die linke und rechte Seite nur durch die Klammerung unterscheiden). Ersetzen wir aber in der betrachteten Formel ‘ \leftrightarrow ’ durch ‘ \rightarrow ’, so erhalten wir:

$$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$$

w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	f
w	w	f	w	w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	f	f	f	w	w
f	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f
1	3	1	2	1	w	1	4	1	5	1

Damit ist $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$ eine gültige Formel. Diese Formel entspricht übrigens der aus der Mengenlehre bekannten Gleichung $(A \cap (B \cup C)) \subseteq ((A \cap B) \cup C)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B && \text{für alle } x \\ x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B && \text{für alle } x \\ A \subseteq B &\iff x \in A \rightarrow x \in B && \text{für alle } x \end{aligned}$$

Offensichtlich entspricht jeder Formel F mit den Aussagenvariablen A_1, \dots, A_n eine Abbildung $\nu_F : \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow B^n$. Derartige Abbildungen nennen wir auch n -wertige *Wahrheitswertabbildungen*. Die Auswertung von Formeln unter Belegungen entspricht der *Semantik* der AL.

Definition 4.4 (Gültigkeit, Allgemeingültigkeit, logische Äquivalenz)

Gilt eine F unter einer Belegung ν , so schreiben wir $\nu \models F$. ν wird auch Modell von F genannt.

Gilt eine F unter jeder Belegung ν , so schreiben wir $\models F$. Wir nennen F dann auch Tautologie.

Sind F_1, F_2 zwei Formeln, so daß F_1 und F_2 unter jeder Belegung gleich ausgewertet werden (d.h., für alle Belegungen ν gilt $\nu \models F_1 \iff \nu \models F_2$), so heißen F_1 und F_2 logisch äquivalent, und wir schreiben

$$F_1 \iff F_2$$

Satz 4.5 Zwei Formeln F_1, F_2 sind genau dann logisch äquivalent, wenn $\models F_1 \leftrightarrow F_2$ gilt. Eine Formel F_2 folgt (semantisch) aus einer anderen Formel F_1 sind genau dann, wenn $\models F_1 \rightarrow F_2$ gilt.

Verkürzt könnten wir auch schreiben:

$$\begin{aligned} F_1 \models F_2 \text{ und } F_2 \models F_1 &\iff \models F_1 \leftrightarrow F_2 \\ F_1 \models F_2 &\iff \models F_1 \rightarrow F_2 \end{aligned}$$

Man beachte den Wechsel zwischen Meta-Ebene, was in der zweiten Äquivalenz besser zu erkennen ist: Das linke Meta-Symbol \models zwischen Formeln wird durch ein *to* innerhalb einer Formel ‘ersetzt’.

Es gelten folgende wichtige logischen Äquivalenzen für Formeln F, G, H :

	Name	Bemerkung
$F \wedge G \iff F \wedge G$ $F \vee G \iff F \vee G$	Kommutativgesetz	gilt auch bei Mengen gilt auch in Verbänden
$(F \wedge G) \wedge H \iff F \wedge (G \wedge H)$ $(F \vee G) \vee H \iff F \vee (G \vee H)$	Assoziativgesetz	gilt auch bei Mengen gilt auch in Verbänden
$F \wedge F \iff F$ $F \vee F \iff F$	Idempotenz	gilt auch bei Mengen gilt auch in Verbänden
$(F \wedge G) \vee F \iff F$ $(F \wedge G) \vee H \iff F$	Auslöschung	gilt auch bei Mengen gilt auch in Verbänden
$F \wedge (G \vee H) \iff (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ $F \vee (G \wedge H) \iff (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	Distributivgesetz	gilt auch bei Mengen, aber nicht in Verbänden
$\neg(G \vee H) \iff (\neg F \wedge \neg G)$ $\neg(G \wedge H) \iff (\neg F \vee \neg G)$	de Morgan	gilt auch bei Mengen, aber nicht in Verbänden
$F \vee \neg F \iff \top$ $F \wedge \neg F \iff \perp$	Komplementeigenschaft	gilt auch bei Mengen, aber nicht in Verbänden

Wir werden nun Formeln in bestimmte Formen umformen (was für ein Satz ...). Dazu werden weitere Äquivalenzen bereitgestellt.

$$\begin{aligned} F \wedge G &\iff \neg(\neg F \vee \neg G) \\ F \vee G &\iff \neg(\neg F \wedge \neg G) \\ F \rightarrow G &\iff \neg F \vee G \\ &\iff \neg(F \wedge \neg G) \\ F \leftrightarrow G &\iff (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \\ &\iff (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F) && \text{konjunktive Normalform, KNF} \\ &\iff (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G) && \text{disjunktive Normalform, DNF} \end{aligned}$$

Mit diesen Äquivalenzen sieht man leicht:

Satz 4.6 Jede Formel läßt sich so umformen, daß nur

- *nur die Junktoren \neg und \wedge benutzt werden.*
- *nur die Junktoren \neg und \vee benutzt werden.*
- *nur die Junktoren \neg und \rightarrow benutzt werden.*

Neben diesem ‘minimalen Gebrauch von Junktoren’ gibt es auch bestimmte, sogenannte Normalformen.

Definition 4.7 Ein Literal ist eine Aussagenvariable A_i oder eine negierte Aussagenvariable $\neg A_i$.

Eine aussagenlogische Formel befindet sich in konjunktiver Normalform, wenn sie die folgende Gestalt hat:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \quad ,$$

wobei jeder ‘Faktor wiederum eine Disjunktion von Literalen ist, so daß in jedem Faktor jede der Aussagenvariable A_1, \dots, A_n genau einmal vorkommt.

Die disjunktive Normalform von Formeln ist analog definiert, indem man in der obigen Definition nur die Zeichen \wedge und \vee vertauscht.

Satz 4.8 Jede Formel ist äquivalent zu einer Formel in konjunktiver Normalform und zu einer Formel in disjunktiver Normalform.

Sei nun ein Summand S einer konjunktiven Normalform gegeben. Dann kann man die Menge der in S vorkommenden Aussagenvariablen in zwei disjunkte Mengen $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ und $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ unterteilen (dabei erlauben wir auch $m = 0$, d.h. $A = \emptyset$, also, oder $n = 0$, d.h. $B = \emptyset$), so daß man S wie folgt schreiben kann:

$$\begin{aligned} S &= \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n & (4.1) \\ &\iff \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m) \vee (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n) \\ &\iff \bigwedge_{i=1}^m A_i \rightarrow \bigvee_{i=1}^n B_i \end{aligned}$$

Man kann also die Summanden einer konjunktiven Normalform als eine Art allgemeine Implikation auffassen, wobei die linke Seite eine Konjunktion und die rechte Seite eine Disjunktion ist. Derartige Implikationen werden *Klauseln* genannt. Damit läßt sich jede Formel als eine Konjunktion von Klauseln darstellen. Häufig benutzt man auch einfach die Darstellung in Form einer Menge von Klauseln.

Man beachte, daß wir auch $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ zugelassen haben. Ähnlich, wie wir es in der Verbandstheorie zeigen konnten, gilt:

$$\bigwedge \emptyset = \top \quad \text{und} \quad \bigvee \emptyset = \perp$$

Für $A = \emptyset$ erhalten wir damit den Sonderfall $\bigwedge \emptyset \rightarrow \bigvee B \iff \top \rightarrow \bigvee B \iff \bigvee B$

Für $B = \emptyset$ erhalten wir damit den Sonderfall $\bigwedge A \rightarrow \bigvee \emptyset \iff \bigwedge A \rightarrow \perp \iff \neg \bigwedge A$

Diese Sonderfälle kann man auch direkt aus der Darstellung Eqn. 4.1 ablesen.

Mittels der Wahrheitstabelle kann man die Normalformen einer Formel ablesen. Wir kommen noch einmal auf die Tabelle der Formel $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$ zurück:

	$(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$										
DNF	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
DNF	w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	f
DNF	w	w	f	w	w	w	w	f	f	w	w
DNF	w	f	f	f	f	w	w	f	f	f	f
KNF	f	f	w	w	w	f	f	f	w	w	w
DNF	f	f	w	w	f	w	f	f	w	f	f
KNF	f	f	f	w	w	f	f	f	f	w	w
DNF	f	f	f	f	f	w	f	f	f	f	f

Die Formel wird für genau sechs Zeilen wahr. Die Belegungen der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten kann man aus den Zeilen ablesen, und diese Belegungen kann man jeweils als Konjunktion von Literalen modellieren. Die DNF ist die Disjunktion der entsprechenden Belegungen. Für unser Beispiel erhalten wir:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$

Die DNF kann als eine Aufzählung der Modelle, in denen F gültig ist, betrachtet werden.

Die beiden anderen Belegungen sind gerade die Modelle, in denen die Formel *nicht* gültig wird. Damit ist die Formel zur folgenden Formel äquivalent, die noch mit de Morgan umgeformt wird:

$$\begin{aligned} \neg((\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) &\iff \neg(\neg A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \\ &\iff (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \end{aligned}$$

Die letzte Formel ist gerade in KNF. Jeder Faktor der KNF wird für genau eine Belegung, d.h., in genau einem Modell ungültig (das Modell kann man durch das Negieren der Literale erhalten). Die KNF entspricht also eher einem AUsschlußverfahren: Jeder Faktor schließt gerade eines der Modelle aus, in der die KNF ungültig wird.

Man kann die KNF und DNF auch durch Anwendungen von Umformungsregeln auf Formeln erhalten. Dieses wird in der Regel recht aufwendig und soll hier nur an einem kleinen Beispiel, nämlich der Formel $A \vee (\neg B \wedge (C \rightarrow B))$, demonstriert werden.

$$\begin{aligned} A \vee (\neg B \wedge (C \rightarrow B)) &\iff A \vee (\neg B \wedge (\neg C \vee B)) \\ &\iff (A \vee \neg B) \wedge (A \vee (\neg C \vee B)) \\ &\iff ((A \vee \neg B) \vee (C \wedge \neg C)) \wedge (A \vee \neg C \vee B) \\ &\iff ((A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)) \wedge (A \vee \neg C \vee B) \\ &\iff (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \end{aligned}$$

Prinzipiell kann man Formeln mit folgendem Verfahren in eine gewünschte NF übersetzen:

1. Teilformeln $F \rightarrow G$ kann man durch $\neg F \vee G$ ersetzen.
2. Teilformeln $F \leftrightarrow G$ kann man durch $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ ersetzen.

Damit kann jede Teilformel in eine Formel, die nur die Junktoren \neg, \wedge, \vee enthält, überführen. Nun können diese Junktoren aber beliebig tief geschachtelt sein. Das löst man wie folgt:

1. Eine Teilformel der Form $\neg(\dots)$ kann man mit de Morgan vereinfachen.
2. Hintereinanderauführen von \wedge, \vee und \wedge kann man mit Distributivgesetzen vereinfachen, ebenso das
3. Hintereinanderauführen von \vee, \wedge und \vee kann man mit Distributivgesetzen vereinfachen.

Damit kann jede Formel als Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, oder Disjunktion von Konjunktionen von Literalen, darstellen. Beide Formen können auch mit dem Distributivgesetz ineinander überführt werden. Allerdings haben wir dann noch keine Normalformen vorliegen, da dort zusätzlich gefordert ist, daß jeder Summand (in der DNF) bzw. jeder Faktor (in der KNF) sämtliche AV genau einmal enthält. Für jede Formel F und jede AV X gilt: aber:

1. $F \iff ((F \wedge X) \vee (F \wedge \neg X))$ und
2. $F \iff ((F \vee X) \wedge (F \vee \neg X))$.

Damit kann man jeden Summanden oder Faktor entsprechend ergänzen. Nun werden noch doppelt vorkommende Literale in den Summanden oder Faktoren entfernt, anschließend werden doppelt vorkommende Summanden oder Faktoren entfernt. Summanden oder Faktoren, die sowohl eine Aussagenvariable als auch deren Negation enthalten, können aus der jeweiligen Normalform entfernt werden. Damit gelangt man schließlich zur gewünschten NF.

4.2 Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik waren Aussagen die atomaren Bestandteile, die mit Hilfe von logischen Junktoren miteinander verknüpft worden sind. Damit ist die AL im wesentlichen eine Theorie der logischen Verknüpfungen. Die Aussagen dagegen werden als gegeben hingenommen. Das reicht aber für viele logische Fragestellungen nicht aus. Betrachten wir folgenden Schluß:

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also ist Sokrates sterblich

Dieser Schluß läßt sich nicht mit Hilfe der Aussagenlogik erfassen. Wesentlich bei diesem Schluß ist die Tatsache, daß die Aussagen über Objekte und ihre Eigenschaften sind.

Wir erweitern die Sprache der Logik um Zeichen für Objekte und Eigenschaften von und zwischen Objekten, also Relationen.

Definition 4.9 (Alphabet der Prädikatenlogik) *Das Alphabet der Prädikatenlogik besteht aus folgenden Zeichen:*

1. Variablen x_1, x_2, x_3, \dots
2. Objektnamen a_1, a_2, a_3, \dots
3. Relationsnamen R_1, R_2, \dots . Jede Relation R_i hat eine Stelligkeit $ar(R_i) \in \mathbb{N}_0$.
4. Die Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ heißen (logische) Junktoren
5. Die Zeichen \exists, \forall heißen Quantoren
6. Außerdem benötigen wir die Klammern (und).

Statt den indizierten Buchstaben a_i werden wir auch häufig die Buchstaben a, v, c, d, e für Objekte benutzen, die wir auch ab und zu indizieren werden. Analog werden wir x, y, z als Variablen benutzen, und P, Q, R, S, T für Relationen.

Definition 4.10 (Formeln der Prädikatenlogik)

1. Jede Variable und jeder Objektname ist ein Term.
2. Ist R_i ein Relationsname mit der Stelligkeit n und sind t_1, \dots, t_n Terme, so ist $R_i(t_1, \dots, t_n)$ eine (atomare) Formel.
3. Sind F, F_1, F_2 Formeln, so auch $\neg F, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2)$, und $(F_1 \leftrightarrow F_2)$.
4. Ist F eine Formel und x eine Variable, so sind $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.

Beispiele für Formeln:

1. $P(a), R(x, a, b), S(x, x, y)$ (mit $ar(P) = 1, ar(R) = ar(S) = 1$)
2. $((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$
3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$