Fachhochschule Darmstadt
Dr. Frithjof Dau

WS 2004
03.02.2005

CNAM: Theoretische Informatik I

Übung 7

Aufgabe 1: Wahrheitstafeln, Normalformen: Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig? Begründen Sie erst anschaulich, dann stellen Sie eine Wahrheitstabelle auf. Bestimmen Sie für die Formeln jeweils ihre konjunktive und disjunktive Normalform.

$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee C \qquad (A \wedge \neg C) \vee (\neg B \vee C) \rightarrow (A \wedge C) \vee \neg B \qquad ((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

Lösung:

Die Aufgabe wird nur für die zweite Formel durchgeführt. Für die erste Formel wird auf das Skript verwiesen, die dritte Formel ist eine Tautologie.

Um die Wahrheitstabelle für die zweite Formel aufzustellen, tragen wir als erstes alle Belegungen für A, B, C in die Tabelle ein.

	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$C)$	$\vee$	$(\neg$	B	$\vee$	$C)$	$\rightarrow$	$(A$	$\wedge$	$C)$	$\vee$	$\neg$	B
	w			w			w		w		w		w			w
	w			f			w		f		w		f			w
	w			w			f		w		w		w			f
	w			f			f		f		w		f			f
	f			w			w		w		f		w			w
	f			f			w		f		f		f			w
	f			w			f		w		f		w			f
	f			f			f		f		f		f			f
	1			1			1		1		1		1			1

Für den nächsten Schritt bietet es sich an, alle Negationszeichen auszuwerten.

	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$C)$	$\vee$	$(\neg$	B	$\vee$	$C)$	$\rightarrow$	$(A$	$\wedge$	$C)$	$\vee$	$\neg$	B
	w		f	w		f	w		w		w		w		f	w
	w		w	f		f	w		f		w		f		f	w
	w		f	w		w	f		w		w		w		w	f
	w		w	f		w	f		f		w		f		w	f
	f		f	w		f	w		w		f		w		f	w
	f		w	f		f	w		f		f		f		f	w
	f		f	w		w	f		w		f		w		w	f
	f		w	f		w	f		f		f		f		w	f
	1		2	1		2	1		1		1		1		2	1

Nun werten wir nacheinander alle inneren Klammern aus.

	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$C)$	$\vee$	$(\neg$	B	$\vee$	$C)$	$\rightarrow$	$(A$	$\wedge$	$C)$	$\vee$	$\neg$	B
	w	f	f	w		f	w	w	w		w	w	w		f	w
	w	w	w	f		f	w	f	f		w	f	f		f	w
	w	f	f	w		w	f	w	w		w	w	w		w	f
	w	w	w	f		w	f	w	f		w	f	f		w	f
	f	f	f	w		f	w	w	w		f	f	w		f	w
	f	f	w	f		f	w	f	f		f	f	f		f	w
	f	f	f	w		w	f	w	w		f	f	w		w	f
	f	f	w	f		w	f	w	f		f	f	f		w	f

Es folgen die beiden äußeren Disjunktionen. Es ist wichtig zu beachten, daß die Disjunktionen vor der Implikation ausgewertet wird: Aufgrund der Bindungsstärke der Quantoren ist die Formel als $((A \wedge \neg C) \vee (\neg B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge C) \vee \neg B)$ zu lesen, d.h., die Implikation wird als letzes ausgewertet.

	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$C)$	$\vee$	$(\neg$	B	$\vee$	$C)$	$\rightarrow$	$(A$	$\wedge$	$C)$	$\vee$	$\neg$	B
	w	f	f	w	w	f	w	w	w		w	w	w	w	f	w
	w	w	w	f	w	f	w	f	f		w	f	f	f	f	w
	w	f	f	w	w	w	f	w	w		w	w	w	w	w	f
	w	w	w	f	w	w	f	w	f		w	f	f	w	w	f
	f	f	f	w	w	f	w	w	w		f	f	w	f	f	w
	f	f	w	f	w	f	w	f	f		f	f	f	f	f	w
	f	f	f	w	f	w	f	w	w		f	f	w	w	w	f
	f	f	w	f	w	w	f	w	f		f	f	f	w	w	f
	1	3	2	1	6	2	1	4	1		1	5	1	7	2	1

Abschließend wird die Implikation ausgewertet. Die Zeilen, wo sich ein w ergibt, sind für die DNF relevant, die anderen Zeilen für die KNF.

	$(A$	$\wedge$	$\neg$	$C)$	$\vee$	$(\neg$	B	$\vee$	$C)$	$\rightarrow$	$(A$	$\wedge$	$C)$	$\vee$	$\neg$	B
DNF	w	f	f	w	w	f	w	w	w	w	w	w	w	w	f	w
KNF	w	w	w	f	w	f	w	f	f	f	w	f	f	f	f	w
DNF	w	f	f	w	w	w	f	w	w	w	w	w	w	w	w	f
DNF	w	w	w	f	w	w	f	w	f	w	w	f	f	w	w	f
KNF	f	f	f	w	w	f	w	w	w	f	f	f	w	f	f	w
KNF	f	f	w	f	w	f	w	f	f	f	f	f	f	f	f	w
DNF	f	f	f	w	f	w	f	w	w	w	f	f	w	w	w	f
DNF	f	f	w	f	w	w	f	w	f	w	f	f	f	w	w	f
	1	3	2	1	6	2	1	4	1	8	1	5	1	7	2	1

Zusammenfassend für die Belegungen erhalten wir: Die Formel wird für genau fünf Zeilen wahr. Die Belegungen der Aussagenvariablen mit w,f kann man aus den Zeilen ablesen, und diese Belegungen kann man jeweils als Konjunktion von Literalen modellieren. Die DNF ist die Disjunktion der entsprechenden Belegungen.
Die anderen drei Belegungen sind gerade die Modelle, in denen die Formel *nicht* gültig wird. Sie führen zur KNF. Man beachte, daß in der KNF die Wahrheitswerte 'umgedreht' werden müssen (ein Eintrag 'w' in der Tabelle wird in der KNF gerade durch das *negative* Literal ausgedrückt, und ein Eintrag 'f' in der Tabelle wird durch das *positive* Literal ausgedrückt).

	A	B	C
DNF	w	w	w
KNF	w	w	f
DNF	w	f	w
DNF	w	f	f
KNF	f	w	w
KNF	f	w	f
DNF	f	f	w
DNF	f	f	f

Damit erhalten wir die DNF:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Die KNF sieht wie folgt aus:

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$$

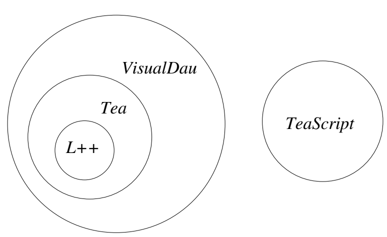
Aufgabe 2: Gültige Aussagen: Welche der folgenden Begründungen würden Sie als logisch richtig akzeptieren? Übersetzen Sie dazu bei den ersten beiden Aufgabenteilen erst die Sätze in geeignete Formeln der Aussagenlogik.

- Die Regierung sagt: Wenn die Konjunktur nicht steigt, senken wir die Steuern. Wenn also die Konjunktur wider Erwarten besser wird, bleiben uns die Steuererleichterungen versagt.
- Die Regierung sagt: Wenn die Konjunktur nicht steigt, senken wir die Steuern. Damit haben wir in Zukunft eine bessere Konjunktur oder weniger Steuern.
- Jeder $L{+}{+}$-Compiler kann auch Tea kompilieren. Kein $VisualDau$-Compiler kann $TeaSkript$ kompilieren. Jeder Tea-Compiler kann $VisualDau$ kompilieren. Also:
    1. Kein $L{+}{+}$-Compiler kann $TeaSkript$ kompilieren?
    2. Mindestens ein $L{+}{+}$-Compiler kann kein $TeaSkript$ kompilieren?
    3. Mindestens ein $L{+}{+}$-Compiler kann $TeaSkript$ kompilieren?
    4. Jeder $L{+}{+}$-Compiler kann $TeaSkript$ kompilieren?

Lösung:

- Die Implikation des ersten Satzes macht *ausschließlich* eine Aussage für den Fall, daß die Konjunktur nicht steigt. Es kann also für den Fall einer Konjunktursteigerung kein Schluß gemacht werden, insb. nicht dahingehend, daß uns Steuererleichterungen versagt bleiben.

  Allerdings sollte man bemerken, daß in der Regel solche Aussagen wie „Wenn die Konjunktur nicht steigt, senken wir die Steuern“ durchaus so gemeint sind, daß bei einer Konjunktursteigerung keine Steuererleichterung geplant ist. Denn: Wenn auch bei Konjunktursteigerung eine Steuersenkung geplant ist, d.h., wenn generell eine Steuersenkung –egal, was die Konjunktur macht– geplant wäre, würde die Regierung das wohl auch so verkünden und die Aussage nicht nur für den Fall einer stagnierenden Konjunktur machen. Sprachgebrauch und formale Logik müssen nicht unbedingt übereinstimmen. Nicht jeder verhält sich wie Mr. Spock.
- Diese Folgerung ist richtig.
- Die Aussage „jeder $L{+}{+}$-Compiler kann auch Tea kompilieren“ bedeutet, daß die Menge der $L{+}{+}$ eine Teilmenge ist-Compiler von der Menge der Tea-Compiler. Analog kann der dritte Satz verstanden werden: Die Menge der Tea-Compiler ist wiederum eine Teilmenge der $VisualDau$-Compiler. Die zweite Aussage hingegen bedeutet, daß der Schnitt der Menge der $VisualDau$-Compiler und der Menge der $TeaSkript$-Compiler leer ist. Zusammenfassend kann man also die Mengen wie folgt skizzieren:

  Nun sehen wir die Lösung der Aufgabe:
    1. Diese Aussage ist richtig.
    2. Diese Aussage ist nur richtig, wenn wir wüssten, daß es überhaupt $L{+}{+}$-Compiler gibt. Da das aber nicht behauptet wird, können wir diese Aussage nicht schließen.
    3. Diese Aussage ist falsch.
    4. Diese Aussage ist falsch.

Aufgabe 3: Übersetzen von Sätzen: Übersetzen Sie folgende Formeln in natürliche Sätze:

- $\forall x\, \exists y : \mathit{schlauerals}(y, x)$ (wobei x, y für Menschen stehen sollen)
- $\forall x\, \exists y : R(x, y) \wedge \forall x\, \forall y\, \forall z : (R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z)$ (wobei R eine Relation ist)
- $\forall w\, \exists x : (x > w \wedge (\forall y\, \forall z : y \cdot z = x \rightarrow (z = 1 \vee z = x)))$ (wobei w, x, y, z aus den natürlichen Zahlen sein sollen).

Lösung:

- Zu jedem Menschen gibt es einen (anderen) Menschen, der noch schlauer ist.
- Der erste Teil der Formel besagt, daß es zu jedem x *mindestens* ein y mit $R(x, y)$ gibt. Der zweite Teil der Formel besagt, daß es zu jedem x *höchstens* ein y mit $R(x, y)$ gibt. Also besagt die gesamte Formel: Zu jedem x gibt es *genau* ein y mit $R(x, y)$, d.h., R ist eine Funktion (und wir können $y = R(x)$ statt $R(x, y)$ schreiben).
- $\forall w\, \exists x : (x > w \wedge (\forall y\, \forall z : y \cdot z = x \rightarrow (z = 1 \vee z = x)))$ (wobei w, x, y, z aus den natürlichen Zahlen sein sollen).

  Die Formel $\forall y\, \forall z : y \cdot z = x \rightarrow (z = 1 \vee z = x)$ beschreibt eine Eigenschaft für x (je nachdem, was man für x einsetzt, wird sie zu wahr oder falsch ausgewertet). Die Eigenschaft ist folgende: Wann immer x als Produkt $y \cdot z$ dargestellt wird, dann ist der Faktor z entweder 1 oder x. Anders ausgedrückt: x läßt sich nicht als Produkt $y \cdot z$, darstellen, so daß z nicht einer der trivalen Teiler 1 oder x ist. D.h., x ist eine Primzahl. Die gesamte Formel können wir also wie folgt schreiben:

  $$\forall w\, \exists x : (x > w \wedge \text{Primzahl}(x))$$

  Die gesamte Formel besagt also: Zu jeder Zahl w gibt eine Primzahl x, die größer als w ist. Anders ausgedrückt: Es gibt keine größte Primzahl.

Aufgabe 4: Übersetzen von Formeln: Übersetzen Sie folgende natürliche Sätze in Formeln:

- Auf jeden Topf paßt ein Deckel.
- Es gibt eine Person, die von allen Katholiken angebetet wird.
- Zwischen je zwei Zahlen liegt eine dritte.

Lösung:

- $\forall x : \mathit{Topf}(x) \rightarrow (\exists y : \mathit{Deckel}(y) \wedge \mathit{passtauf}(y, x))$
- $\exists x \forall y : \mathit{Katholik}(x) \rightarrow \mathit{anbeten}(x, y)$
- $\forall x \forall y \exists z : x < y < z$ (unter der Voraussetzung, daß nur Zahlen betrachtet werden, also daß x, y, z nur über Zahlen laufen).

Aufgabe 5: Quantorentausch: Welche Formel impliziert die andere?

$$\forall x \exists y : R(x, y) \qquad \exists y \forall x : R(x, y)$$

Wie sind die Formeln zu verstehen, wenn x, y für Menschen und R für die Relation 'lieben' steht?

Lösung:
Die erste Formel würde bedeuten: Jeder Mensch liebt einen anderen. Die zweite Formel würde bedeutet: Es gibt einen Menschen, der von allen geliebt wird. Das ist natürlich eine weitaus stärkere Aussage. Daran sieht man auch, daß die zweite Formel die erste impliziert, aber nicht umgekehrt.