

CNAM: Theoretische Informatik I

Übung 4

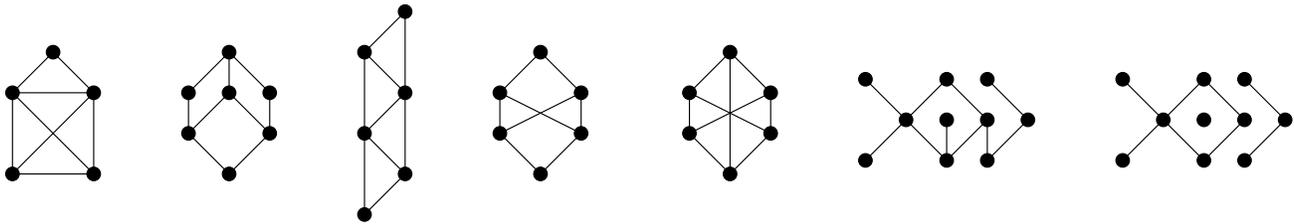
Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die folgenden Relationen, ob es sich um Äquivalenzrelationen, Quasiordnungen, Halbordnungen, oder totale Ordnungen handelt.

	Äquivalenzrel	Quasiordnung	Halbordnung	totale Ordnung
$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$				
$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \geq b\}$				
$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a b\}$				
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b \}$				
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \leq b \}$				
$\{(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq B\}$				
$\{(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A = B \}$				
$\{(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A \cap B = \emptyset\}$				
$\{(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid a_1 \leq a_2 \text{ und } b_1 \leq b_2\}$				

Lösung:

	Äquivalenzrel	Quasiordnung	Halbordnung	totale Ordnung
$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$				
$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \geq b\}$		x	x	x
$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a b\}$		x	x	
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b \}$	x	x		
$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \leq b \}$		x		
$\{(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq B\}$		x	x	
$\{(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A = B \}$	x	x		
$\{(A, B) \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid A \cap B = \emptyset\}$				
$\{(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid a_1 \leq a_2 \text{ und } b_1 \leq b_2\}$		x	x	

Aufgabe 2: Welche der folgenden Diagramme sind Hasse-Diagramme einer Ordnung?



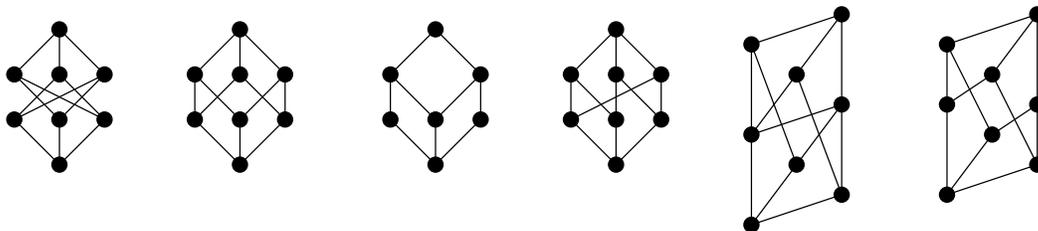
Lösung:

Das erste Diagramm ist kein Hassediagramm, da es horizontale Linien enthält.

Das dritte und fünfte Diagramm sind keine Hassediagramme, da sie überflüssige Verbindungen (also Linien, die zwar eine \leq -Beziehung, aber keine Nachbarschaftsbeziehung) enthalten.

Die restlichen Diagramme sind ok.

Aufgabe 3: Sie sehen sechs Hasse-Diagramme, vier davon stellen dieselbe Ordnung verschieden dar. Um welche vier Diagramme handelt es sich?



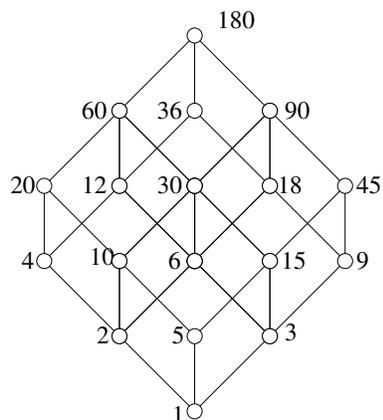
Lösung:

Das erste, zweite, vierte und sechste Diagramm stellen dieselbe Ordnung dar.

Aufgabe 4:

Sie sehen eine Halbordnung, und zwar einen sogenannten Teilverband, der wie folgt gebildet wird: Die Elemente sind alle Teiler von 180, die Ordnungsrelation ist die Teilbarkeitsrelation.

In der Tabelle sehen sie einige Teilmengen dieser Halbordnung. Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie für jede Teilmenge die minimalen, maximalen, kleinsten und größten Elemente angeben.



	minimale. El.	maximale El.	kleinstes El.	größtes El.
{2, 10, 60}				
{6, 12, 18}				
{2, 3, 4, 5, 6}				
{2, 5, 45, 90}				
{2, 5, 36, 45, 90}				
{3, 10, 90}				

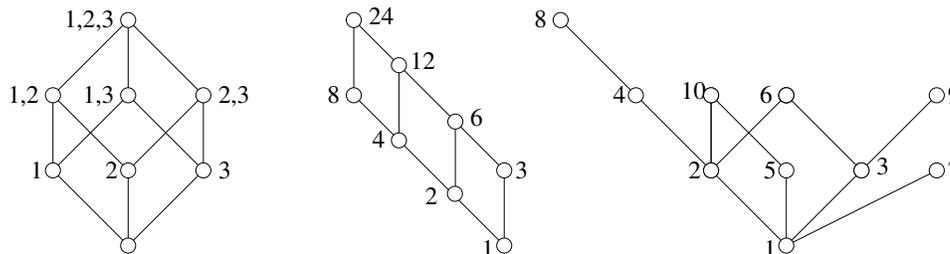
Lösung:

	min. El.	max. El.	kleinstes El.	größtes El.
{2, 10, 60}	2	60	2	60
{6, 12, 18}	6	12,18	6	
{2, 3, 4, 5, 6}	2,3,5	4,5,6		
{2, 5, 45, 90}	2,5	90		90
{2, 5, 36, 45, 90}	2,5	36,90		
{3, 10, 90}	3,10	90		90

Aufgabe 5: Zeichnen Sie Hasse-Diagramme der folgenden Ordnungen:

- $(\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$. D.h. als Elemente der Ordnung betrachten wir alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$, die Ordnungsrelation ist \subseteq .
- Alle Teiler von 24, mit der Teilbarkeitsrelation als Ordnungsrelation.
- Alle Zahlen von 1 bis 10, mit der Teilbarkeitsrelation als Ordnungsrelation.

Lösung:



Aufgabe 6: Leichte Knobelaufgabe: $(\mathbb{N}_0, |)$ ist ein Verband. Was ist das kleinste Element, was ist das größte Element?

Aufgabe 7: Nicht ganz so leichte Knobelaufgabe: Zeigen Sie, daß die Gleichheitsrelation die einzige Relation ist, die sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.