

CNAM: Theoretische Informatik I

Übung 3

Aufgabe 1: Relationen und Funktionen

In der folgenden Tabelle sehen Sie ein paar Mengen. Tragen Sie ein, welche davon eine Relation zwischen $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{1, 2, 3\}$ bzw. welche eine Funktion von A nach B ist, und begründen Sie Ihre Aussage.

	Relation	Funktion	Begründung
\emptyset			
$\{\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}\}$			
$\{(1, 1), (3, 2), (1, 3)\}$			
$\{(1), (1, 2), (1, 2, 3)\}$			
$\{(1, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2)\}$			
$\{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\}$			
$\{(1, 1), (3, 2), (2, 2)\}$			
$\{(3, 2), (2, 2)\}$			

Lösung:

	Relation	Funktion	Begründung
\emptyset	ja	nein	Der Vorbereich ist leer, also insb. nicht $\{1, 2, 3\}$: Deswegen liegt keine Funktion vor.
$\{\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}\}$	ja	nein	Die Menge besteht nicht aus Paaren, sondern Zweiermengen. Deswegen liegt keine Relation vor.
$\{(1, 1), (3, 2), (1, 3)\}$	nein	nein	2 liegt nicht im Vorbereich der Relation, und es gibt zwei Paare (1, 1) und (1, 3): Jeder dieser Punkte bewirkt, daß die Relation keine Funktion ist.
$\{(1), (1, 2), (1, 2, 3)\}$	ja	nein	Die Menge besteht nicht aus Paaren, sondern aus je einem 1-Tupel, 2-Tupel (d.h. ein Paar) und 3-Tupel. Deswegen liegt keine Relation vor.
$\{(1, 1), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2)\}$	ja	nein	Es gibt zwei Paare (1, 1) und (1, 2) (und sogar ein weiteres (1, 3)): Deswegen liegt keine Funktion vor.
$\{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\}$	ja	ja	
$\{(1, 1), (3, 2), (2, 2)\}$	ja	ja	
$\{(3, 2), (2, 2)\}$	ja	nein	Die Relation ist keine Funktion, da 1 nicht im Vorbereich liegt.

Aufgabe 2: Eigenschaften von Funktionen

In der folgenden Tabelle sind einige mathematische Funktionen und einige Funktionen 'aus den wahren Leben' gegeben. Ergänzen Sie die Tabelle um die Eigenschaften der Funktionen.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 10$			
$f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 10$			
$f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$			
$f_4 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$			
$f_5 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$			
$f_6 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 1$			
$f_7 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$			
$f_7 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 1$			
Die Zuordnung von der Menge der Deutschen nach \mathbb{N} , die jedem Menschen seine Personalausweisnummer zuordnet			
Die Zuordnung von der Menge der Deutschen nach $\{m, w\}$, die jedem Menschen sein Geschlecht zuordnet			
Die Zuordnung von der Menge der Menschen nach der Menge der Menschen, die jedem Menschen seine Mutter zuordnet			
Die Zuordnung von der Menge der Mütter nach der Menge der Menschen, die jeder Mutter das erstgeborene Kind zuordnet			

Lösung:

	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 10$	x	x	x
$f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 10$	x		
$f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$	x	x	x
$f_4 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$			
$f_5 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$	x	x	x
$f_6 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 1$			
$f_7 : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$		x	
$f_7 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ mit $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 1$	x		
Die Zuordnung von der Menge der Deutschen nach \mathbb{N} , die jedem Menschen seine Personalausweisnummer zuordnet	x		
Die Zuordnung von der Menge der Deutschen nach $\{m, w\}$, die jedem Menschen sein Geschlecht zuordnet		x	
Die Zuordnung von der Menge der Menschen nach der Menge der Menschen, die jedem Menschen seine Mutter zuordnet			
Die Zuordnung von der Menge der Mütter nach der Menge der Menschen, die jeder Mutter das erstgeborene Kind zuordnet	x		

Aufgabe 3: Verkettung von Relationen

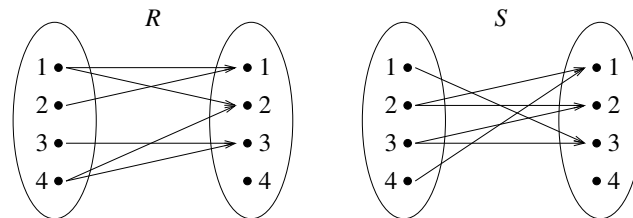
Seien $R := \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (4, 2)\}$ und $S := \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 1)\}$. Berechnen Sie: R^{-1} , $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ R$, $R^{-1} \circ R$, $S \circ R \circ S$, und $S^{-1} \circ R^{-1}$.

Sei M die Relation 'ist Mutter von' und V die Relation 'ist verheiratet mit' (auf der Menge der Menschen). Was bedeutet die Relation $M \circ V$?

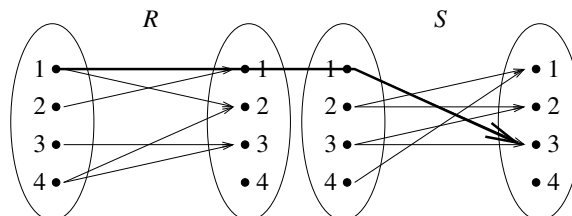
Lösung:

1. $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 4), (2, 4)\} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4)\}$
2. $R \circ S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
3. $S \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$
4. $R \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$
5. $R^{-1} \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$
6. $S \circ R \circ S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), \}$
7. $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

Bemerkung: Ich hoffe, ich habe mich selber nicht vertan bei dieser Lösung. Gelöst habe ich die Aufgabe wie folgt: Für beide Relationen habe ich mir Zettel angefertigt, auf denen die Relationen als 'Pfeildiagramme' skizziert waren, also wie folgt:



Dabei habe ich die Relation s zweimal angefertigt, um auch $S \circ R \circ S$ zu berechnen. Um nun beispielsweise $R \circ S$ zu berechnen, habe ich die Zettel für R und S nebeneinandergelegt, wie man es auch oben sieht, und dann geschaut, wie ich über 'Pfeilwege' von ganz links nach ganz rechts komme. Beispielsweise liegt das Paar $(1, 3)$ in $R \circ S$, weil es den 'Pfeilweg' gibt, der in der nächsten Skizze fett gemalt ist.



Zum nächsten Teil: Sei $(x, z) \in M \circ V$, d.h. es gibt ein y mit $(x, y) \in M$ und $(y, z) \in V$. Genauer: Es gibt eine Person y mit $(x, y) \in M$, d.h. y ist die Mutter von x , sowie $(y, z) \in V$, d.h. y ist verheiratet mit z . Damit ist x die Mutter des Ehepartners von z . Die Relation $M \circ V$ ist also die Relation 'ist Schwiegermutter von'.

Aufgabe 4: Eigenschaften von Relationen Wir betrachten einige Relationen ‘aus den wahren Leben’ zwischen allen Studierenden der FH, und außerdem betrachten wir einige folgende Relationen auf der Menge der natürlichen Zahlen.

- __ liebt __
- __ ist verheiratet mit __
- __ ist größer als __
- __ ist mindestens genauso groß wie __
- __ ist größer und stärker als __
- __ ist mindestens genauso groß und stark wie __
- __ hat eine Matrikelnummer, die mindestens genauso groß wie die von __ :
- __ kennt __
- __ ist am selben Wochentag geboren wie __
- $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x|y\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ und } y \text{ haben beim Teilen durch 4 denselben Rest}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 10\}$

Füllen Sie folgende Tabelle aus:

	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch	transitiv	konnex
liebt							
ist verheiratet mit							
ist größer als							
ist mindestens genauso groß wie							
ist größer und stärker als							
ist mindestens genauso groß und stark wie							
hat eine Matrikelnummer, die ...							
kennt							
ist am selben Wochentag geboren wie							
$x = y$							
$x \leq y$							
$x < y$							
$x y$							
x, y haben beim Teilen durch 4 selben Rest							
$x + y = 10$							

Lösung:

	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch	transitiv	komplex
liebt							
ist verheiratet mit		x	x				
ist größer als		x		x	x	x	
ist mindestens genauso groß wie	x				x	x	x
ist größer und stärker als		x		x	x	x	
ist mindestens genauso groß und stark wie	x				x	x	
hat eine Matrikelnummer, die ...	x				x	x	x
kennt	x						
ist am selben Wochentag geboren wie	x		x			x	
$x = y$	x		x		x	x	
$x \leq y$	x				x	x	x
$x < y$				x	x	x	x
$x y$ (d.h., x teilt y)	x				x	x	
x, y haben beim Teilen durch 4 selben Rest	x		x			x	
$x + y = 10$							

Beim Ausfüllen der Tabelle bin ich davon ausgegangen, daß keine zwei verschiedenen Personen genau gleich groß oder genau gleich stark sind. Misst man Personen beispielsweise nur auf 1cm genau, so kann es verschiedene Personen gleicher Größe geben (analog für die Stärke von Personen): Dann wären die Relationen "ist mindestens genauso groß wie" und "ist mindestens genauso groß und stark wie" nicht mehr antisymmetrisch.