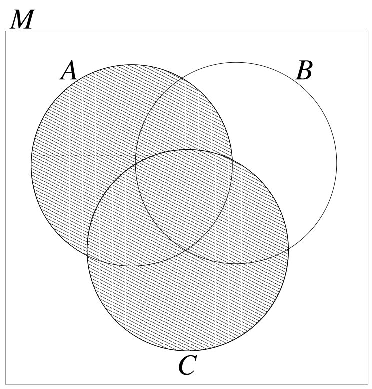
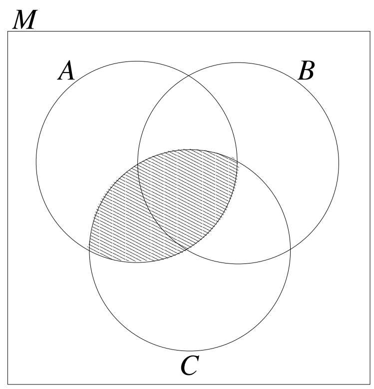
CNAM: Theoretische Informatik I

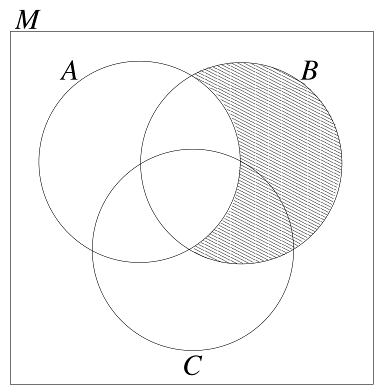
Übung 2

Aufgabe 1: Venndiagramme und Mengenbeschreibungen

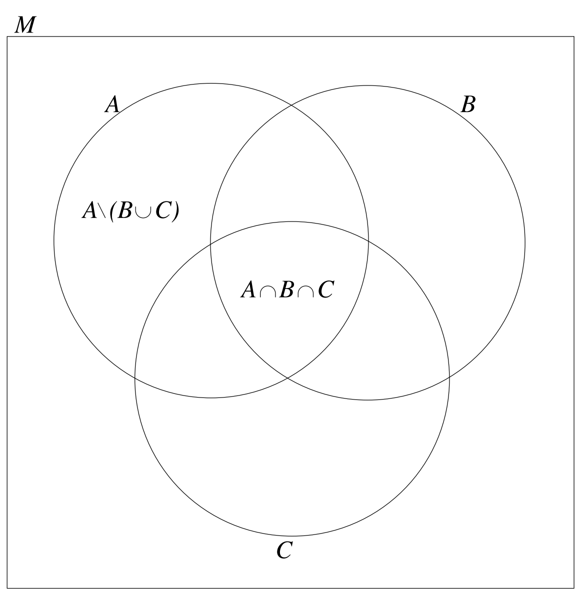
Seien $A, B, C \subseteq M$ Mengen. Venn hat zur Veranschaulichung Diagramme (sog. *Venndiagramme*) eingeführt. In diesen Diagrammen wird jede der Mengen A, B, C durch einen Kreis dargestellt. Schnittmengen entsprechen dann im Diagramm dem Bereich, wo sich zwei Kreise überschneiden, Vereinigungsmengen dem Bereich, der durch zwei Kreise abgedeckt wird, etc. Unten sehen Sie drei Venndiagramme, die $A \cup B$, $A \cap C$ und $B \backslash A$ veranschaulichen.







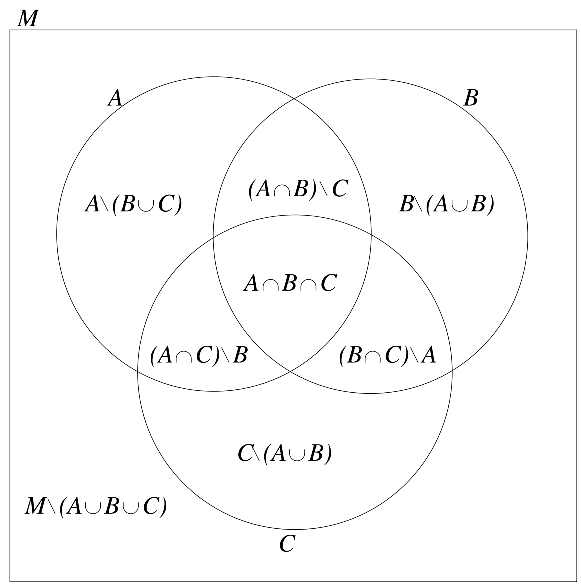
Nun sehen Sie ein Venn-Diagramm, in denen in zwei Segmenten (gemeint sind die 'minimalen Bereiche' in dem Diagramm, die man schraffieren könnte) ein Mengenausdruck steht, der gerade das Segment beschreibt. Ergänzen Sie das Diagramm, indem Sie in jedes weitere Segment einen Mengenausdruck schreiben, der das Segment beschreibt. Vergessen Sie nicht den Bereich außerhalb aller Kreise!



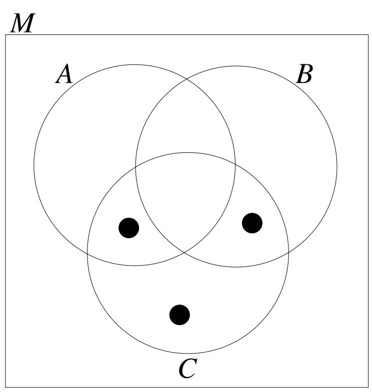
Zeichnen Sie nun Diagramme, in denen folgende Mengen schraffiert sind:

$C\backslash(A\cap B)$, $(A\cap B)\cup C$, $(A\cap B)\cup(B\backslash C)$, $M\backslash(B\cup C)$, $A\backslash(B\backslash C)$, $((A\cap C)\cup((C\cup(B\backslash A))\backslash C)$

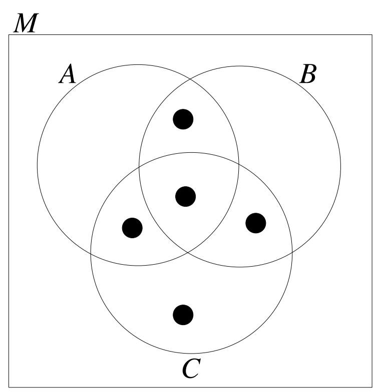
Lösung:



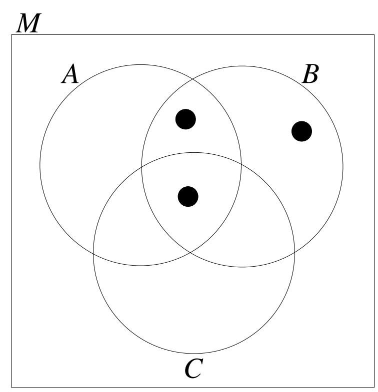
Aus technischen Gründen (Schraffieren ist aufwendig) sind in den nächsten Skizzen die Lösungsbereiche nicht durch Schraffuren, sondern durch Punkte gekennzeichnet.



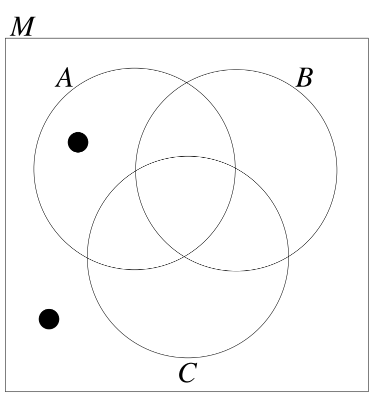
$C\backslash(A \cap B)$



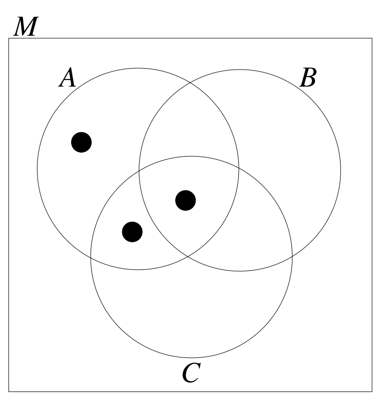
$(A \cap B) \cup C$



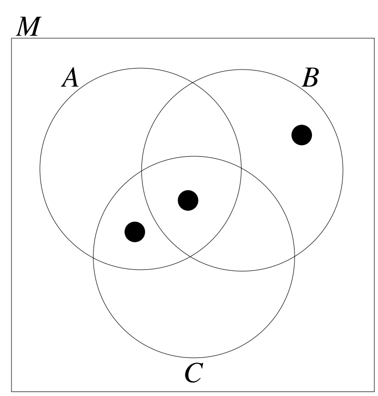
$(A \cap B) \cup (B\backslash C)$



$M\backslash(B \cup C)$



$A\backslash(B\backslash C)$



$((A \cap C) \cup ((C \ \cup (B\backslash A))\backslash C)$

Aufgabe 2: Ausdrücke

In der folgenden Tabelle sehen Sie ein paar Ausdrücke. Tragen Sie ein, welcher davon eine Menge und welcher eine Aussage bechreibt, bzw. welcher Ausdruck unerlaubt ist.

	Menge	Aussage	unerlaubt
$A \in B$			
$A \subseteq B$			
$A \cap B$			
$A \bigcup B$			
$\bigcup A$			
$A \cap \bigcup B$			

Lösung:

	Menge	Aussage	unerlaubt
$A \in B$		x	
$A \subseteq B$		x	
$A \cap B$	x		
$A \bigcup B$			x
$\bigcup A$	x		
$A \cap \bigcup B$	x		

Aufgabe 3: Mengenoperationen

Sei $A := \{1, 2, 3, 3, 4, 6, 7\}$, $A := \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $A := \{6, 7, 8, 9, 10\}$,

Berechnen Sie $(A \cap B) \cup C$ und $A \cap (B \cup C)$. Sie sollten verschiedene Mengen erhalten. Was sagt das über den Ausdruck '$A \cap B \cup C$' aus? Gibt es trotzdem zwischen $(A \cap B) \cup C$ eine $A \cap (B \cup C)$ Beziehung?

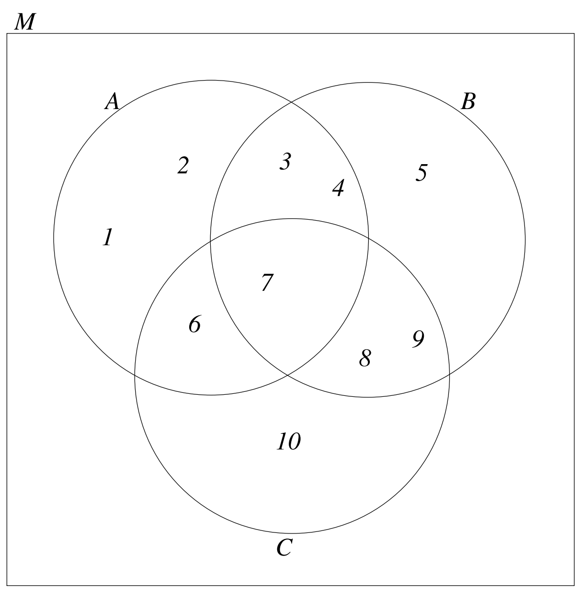
Berechnen Sie $A \cap (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Sie sollten dieselbe Menge erhalten. Warum ist das so?

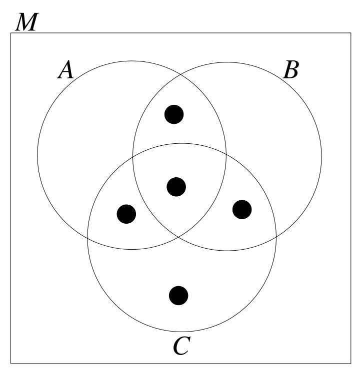
Berechnen Sie $A \cup (B \cap C)$ und $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Auch hier sollten Sie dieselbe Menge erhalten. Warum ist das so?

Hinweis: Es lohnt sich, sich diese Menge in Venn-Diagrammen zu veranschaulichen.

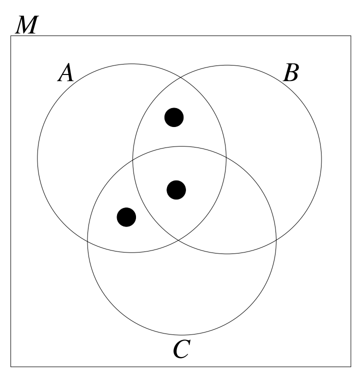
Lösung:

Die Mengen A, B, C und die Ausdrücke $(A \cap B) \cup C$ sowie $A \cap (B \cup C)$ lassen sich wie folgt skizzieren:





$(A \cap B) \cup C$



$A \cap (B \cup C)$

Anhand der rechten Diagramme sieht man, daß generell $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ gilt.

Die gesuchten Mengen lassen sich relativ einfach aus dem linken Diagramm ablesen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup C &= \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\} \\
A \cap (B \cup C) &= \{3, 4, 6, 7\} \\
(A \cap B) \cup (A \cap C) &= \{3, 4, 6, 7\} \\
(A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{3, 4, 7, 8, 9\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Relationen und Funktionen

In der folgenden Tabelle sehen Sie ein paar Mengen. Tragen Sie ein, welche davon eine Relation zwischen $A := \{1,2,3\}$ und $B := \{1,2,3\}$ bzw. welche eine Funktion von A nach B ist, und begründen Sie Ihre Aussage.

	Relation	Funktion	Begründung
$\emptyset$			
$\{\{1,2\},\{2,1\},\{3,1\}\}$			
$\{(1,1),(3,2),(1,3)\}$			
$\{(1),(1,2),(1,2,3)\}$			
$\{(1,1),(3,2),(1,3),(2,3),(1,2)\}$			
$\{(1,1),(3,2),(2,3)\}$			
$\{(1,1),(3,2),(2,2)\}$			
$\{(3,2),(2,2)\}$			

Lösung:

	Relation	Funktion	Begründung
$\emptyset$	ja	nein	Der Vorbereich ist leer, also insb. nicht $\{1,2,3\}$: Deswegen liegt keine Funktion vor.
$\{\{1,2\},\{2,1\},\{3,1\}\}$	ja	nein	Die Menge besteht nicht aus Paaren, sondern Zweiermengen. Deswegen liegt keine Relation vor.
$\{(1,1),(3,2),(1,3)\}$	nein	nein	2 liegt nicht im Vorbereich der Relation, und es gibt zwei Paare $(1,1)$ und $(1,3)$: Jeder dieser Punkte bewirkt, daß die Relation keine Funktion ist.
$\{(1),(1,2),(1,2,3)\}$	ja	nein	Die Menge besteht nicht aus Paaren, sondern aus je einem 1-Tupel, 2-Tupel (d.h. ein Paar) und 3-Tupel. Deswegen liegt keine Relation vor.
$\{(1,1),(3,2),(1,3),(2,3),(1,2)\}$	ja	nein	Es gibt zwei Paare $(1,1)$ und $(1,2)$ (und sogar ein weiteres $(1,3)$): Deswegen liegt keine Funktion vor.
$\{(1,1),(3,2),(2,3)\}$	ja	ja	
$\{(1,1),(3,2),(2,2)\}$	ja	ja	
$\{(3,2),(2,2)\}$	ja	nein	Die Relation ist keine Funktion, da 1 nicht im Vorbereich liegt.

Aufgabe 5: Verkettung von Relationen

Seien $R := \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,3),(4,3),(4,2)\}$ und $S := \{(1,3),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,1)\}$. Berechnen Sie:

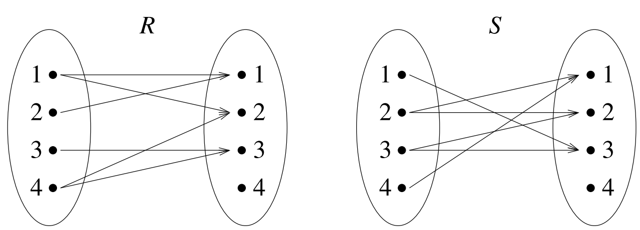
$$R^{-1} \qquad R \circ S \qquad S \circ R \qquad R \circ R \qquad R^{-1} \circ R \qquad S \circ R \circ S \qquad S^{-1} \circ R^{-1}$$

Sei M die Relation ‘ist Mutter von’ und V die Relation ’ist verheiratet mit’ (auf der Menge der Menschen). Was bedeutet die Relation $M \circ V$?

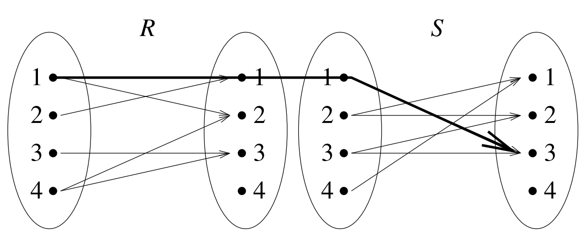
Lösung:

1. $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(1,2),(3,3),(3,4),(2,4)\} = \{(1,2),(2,1),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4)\}$
2. $R \circ S = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
3. $S \circ R = \{(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$
4. $R \circ R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,3),(4,1),(4,3)\}$
5. $R^{-1} \circ R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$
6. $S \circ R \circ S = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),\}$
7. $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1} = \{(2,1),(3,1),(3,2),(2,3),(3,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$

Bemerkung: Ich hoffe, ich habe mich selber nicht vertan bei dieser Lösung. Gelöst habe ich die Aufgabe wie folgt: Für beide Relationen habe ich mir Zettel angefertigt, auf denen die Relationen als ‘Pfeildiagramme’ skizziert waren, also wie folgt:



Dabei habe ich die Relation s zweimal angefertigt, um auch $S \circ R \circ S$ zu berechnen. Um nun beispielsweise $R \circ S$ zu berechnen, habe ich die Zettel für R und S nebeneinandergelegt, wie man es auch oben sieht, und dann geschaut, wie ich über ‘Pfeilwege’ von ganz links nach ganz rechts komme. Beispielsweise liegt das Paar $(1,3)$ in $R \circ S$, weil es den ’Pfeilweg’ gibt, der in der nächsten Skizze fett gemalt ist.



Zum nächsten Teil: Sei $(x,z) \in M \circ V$, d.h. es gibt ein y mit $(x,y) \in M$ und $(y,z) \in V$. Genauer: Es gibt eine Person y mit $(x,y) \in M$, d.h. y ist die Mutter von x, sowie $(y,z) \in V$, d.h. y ist verheiratet mit z. Damit ist x die Mutter des Ehepartners von z. Die Relation $M \circ V$ ist also die Relation ‘ist Schwiegermutter von’.