CNAM: Theoretische Informatik I

Übung 1

Aufgabe 1: Welche der folgenden Mengen sind gleich?

1. $A_1 := \{1, 2, 3, 4\}$
2. $A_2 := \{2, 3, 4, 5\}$
3. $A_3 := \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 4\}$
4. $A_4 := \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 20\}$
5. $A_5 := \{5, 5, 4, 3, 2\}$
6. $A_6 := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$
7. $A_7 := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 20\}$

Lösung:
Es sind die Mengen A_1, A_3 und A_4 gleich. Es sind die Mengen A_2 und A_5 gleich.

Aufgabe 2: Seien $A := \{2, 4, 6\}$, $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C := \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Bestimmen Sie:

$A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\mathfrak{P}(A)$, $A \times B$, A^2

Lösung:

- $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
- $A \cap C = \{2, 4\}$
- $B \cap C = \{1, 2, 4\}$
- $A \cap B \cap C = \{2, 4\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
- $A \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8, 16, 32, 64\}$
- $B \cup B = B$
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16, 32, 64\}$
- $A \backslash B = \{\} = \emptyset$
- $B \backslash A = \{1, 3, 5\}$
- $\mathfrak{P}(A) = \{\{\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $$\begin{aligned} A \times B = \{ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ & (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \} \end{aligned}$$
- $A^2 = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

Aufgabe 3: Beschreiben Sie folgende Menge mit Worten:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{x \in \mathbb{N} \,|\, \text{es gibt ein } y \in \mathbb{N} \text{ mit } y^3 = x\} \\ M_2 &:= \{a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\text{es gibt ein } x \in \mathbb{R} \text{ mit } a = (x, x)\} \end{aligned}$$

Lösung:

M_1 ist die Menge der Kubikzahlen. M_2 ist die Identität.

Aufgabe 4: Beschreiben Sie folgende Menge formal:

1. Die Menge aller irrationalen Zahlen, also die Menge aller reellen Zahlen, die keine Brüche sind.
2. Die Menge aller Tripel a, b, c natürlicher Zahlen, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Lösung:

1. $M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin \mathbb{Q}\}$
2. $N := \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \,|\, a^2 + b^2 = c^2\}$

Aufgabe 5: Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine Menge?

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ und } x^3 + x^2 + x + 1 = 1\}$
2. $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}, \{\{\}\}\}$
3. $\{1, \{\}, 3, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} : x^3 = 1\}$

Lösung:

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ und } x^3 + x^2 + x + 1 = 1\}$ beschreibt keine Menge, aber $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 + x^2 + x + 1 = 1\}$ wäre korrekt.
2. $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}, \{\{\}\}\}$ beschreibt eine Menge mit zwei (!) Elementen.
3. $\{1, \{\}, 3, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}\}$ beschreibt eine Menge mit vier Elementen.
4. $\{x \in \mathbb{N} : x^3 = 1\}$ beschreibt eine Menge mit einem Element, nämlich der 1.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, daß $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ genau dann gilt, wenn $x = x'$ und $y = y'$ gilt.

Aufgabe 7: Begründen oder widerlegen Sie:

1. $A \subseteq B$ gilt genau dann, wenn $A \backslash B = \emptyset$ gilt.
2. $A \backslash B = A$ gilt genau dann, wenn $B \backslash A = B$ gilt.
3. $A \backslash B = A$ gilt genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.
4. Aus $\bigcup A = \bigcup B$ folgt $A = B$.
5. Aus $\bigcap A = \bigcap B$ folgt $A = B$.
6. $\bigcup \mathfrak{P}(A) = A$.
7. Aus $A \times B = A \times C$ folgt $B = C$.

Lösung:
$A \subseteq B$ gilt genau dann, wenn jedes ELement von A auch ein Element von B ist, d.h., wenn es kein Element in A gibt, daß nicht zu B gehört. Diese Aussage wird formalisiert durch $A \backslash B = \emptyset$. Damit ist die erste Aussage der Aufgabe richtig.

Es ist $A \backslash B$ die Menge der Elemente von A, die kein Element von B sind. Damit gilt $A \backslash B = A$ genau dann, wenn kein Element von A auch ein Element von B ist, d.h., wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt. Es folgt damit:

$$A \backslash B = A \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad B \cap A = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad B \backslash A = B$$

(Die erste Umformung haben wir gerade begründet, die zweite gilt aufgrund der Symmetrie von '$\cap$', und die letzte Umformung entspricht der ersten, wobei die Rollen von A und B vertauscht sind.) Damit gelten 2 und 3 der Aufgabe.

„Aus $\bigcup A = \bigcup B$ folgt $A = B$“ ist offensichtlich falsch, wie man beispielsweise für $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ und $B = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ sieht.

„Aus $\bigcap A = \bigcap B$ folgt $A = B$“ ist offensichtlich falsch, wie man beispielsweise für $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ und $B = \{\{1, 2\}, \{6, 7\}\}$ sieht.

$\bigcup \mathfrak{P}(A) = A$ ist richtig.

Aus $A \times B = A \times C$ folgt $B = C$ ist richtig, sofern $A \neq \emptyset$ gilt.